RICHIAMI SULLE SUPERFICI

TERESA ISERNIA

1. Ellissoide

Siano $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. L'equazione dell' **ellissoide di semiassi** a, b, c è:

$$\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} + \frac{\mathbf{z^2}}{\mathbf{c^2}} = \mathbf{1} \tag{1.1}$$

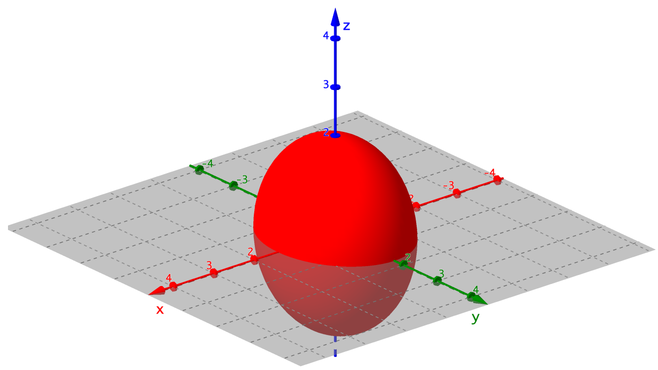


Figure 1. Ellissoide $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1$

La rappresentazione parametrica dell'ellissoide è

$$\begin{cases} x = a\,\cos\vartheta\,\sin\phi \\ y = b\,\sin\vartheta\,\sin\phi \\ z = c\,\cos\phi \end{cases} \qquad \text{con } (\vartheta, \phi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi].$$

Se intersechiamo l'ellissoide (1.1) con il piano $z = \alpha$ abbiamo l'ellisse a punti reali se $\alpha \in (-c, c)$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{\alpha^2}{c^2}$.

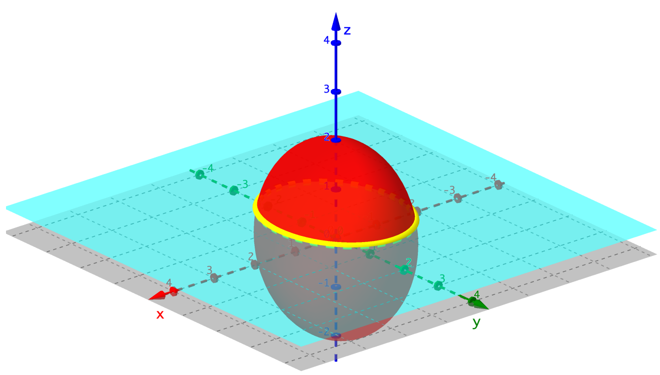
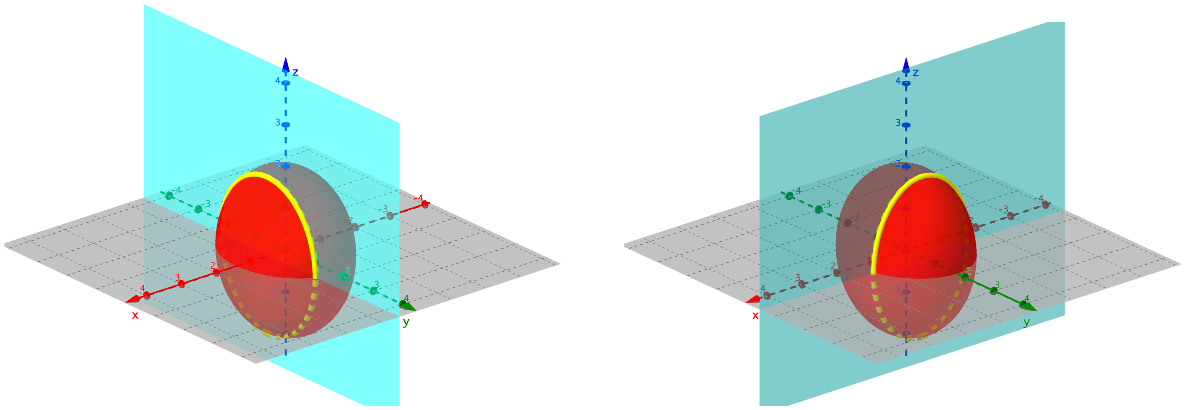


Figure 2. Intersezione con $z = \frac{1}{2}$

Analogamente per le intersezioni con i piani $x = \alpha$ e $y = \alpha$.



(A) Intersezione con $x = \frac{1}{2}$ (B) Intersezione con $y = \frac{1}{2}$

Remark 1.1. *L'equazione dell'ellisse in forma canonica è:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

l'equazione parametrica è:

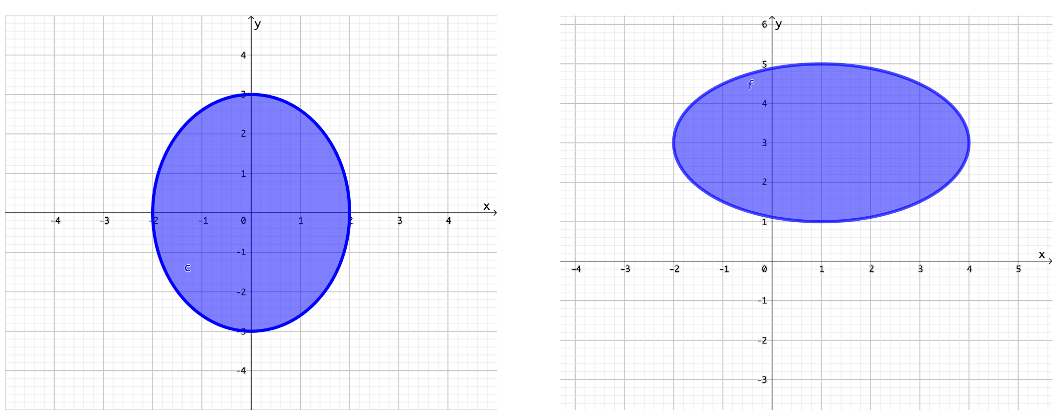
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

L'equazione dell'ellisse con centro $C(x_0, y_0)$ è

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi).$$



(A) Ellisse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (B) Ellisse $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

Se $a = b = c = r$ in (1.1) otteniamo l'equazione di una **sfera** di centro $C(0, 0, 0)$ e raggio r:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 = r^2} \tag{1.2}$$

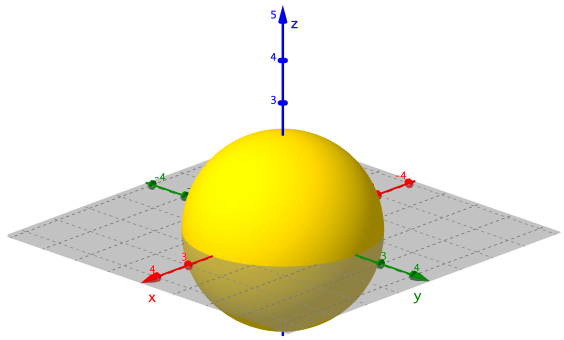


FIGURE 3. Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

L'intersezione della sfera (1.2) con i piani $x = \alpha$ sono delle circonferenze: $y^2 + z^2 = r^2 - \alpha^2$ purchè $\alpha \in (-r, r)$.

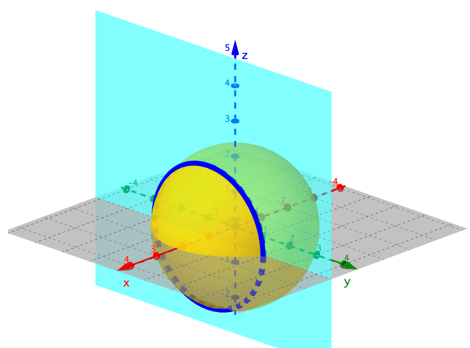
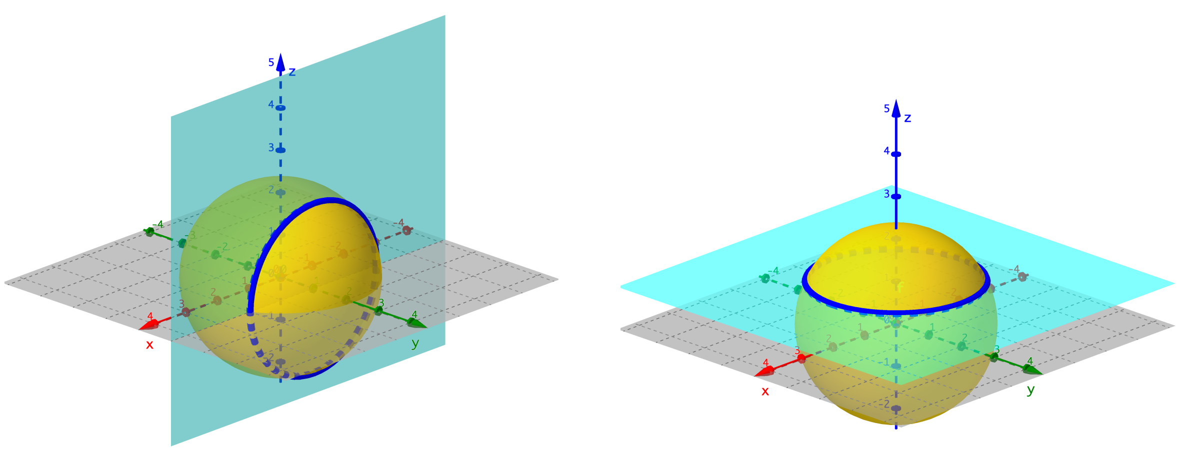


FIGURE 4. Intersezione con $x = 1$

Analogamente per le intersezioni con i piani $y = \alpha$ e $z = \alpha$.



(A) Intersezione con $y = 1$ (B) Intersezione con $z = 1$

Remark 1.2. *L'equazione della circonferenza con centro $O(0,0)$ e raggio r è:*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

l'equazione parametrica è:

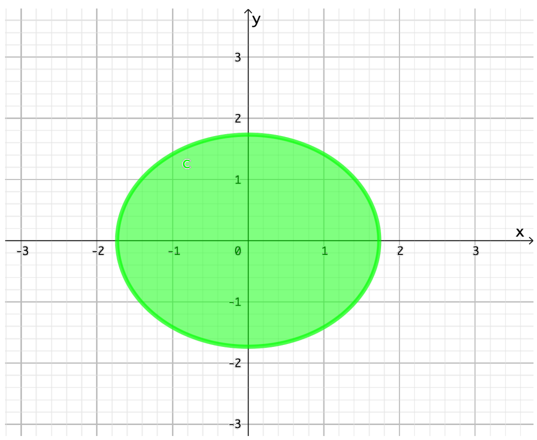
$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$$

L'equazione della circonferenza con centro $C(x_0, y_0)$ e raggio r è

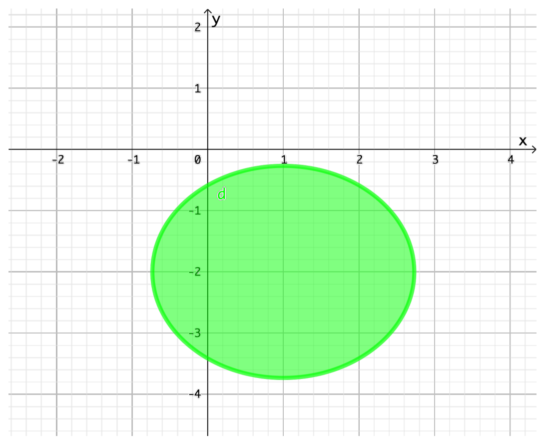
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi).$$

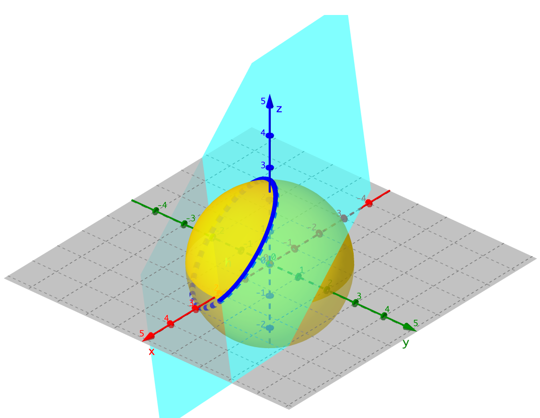


(A) Circonferenza $x^2 + y^2 = 3$

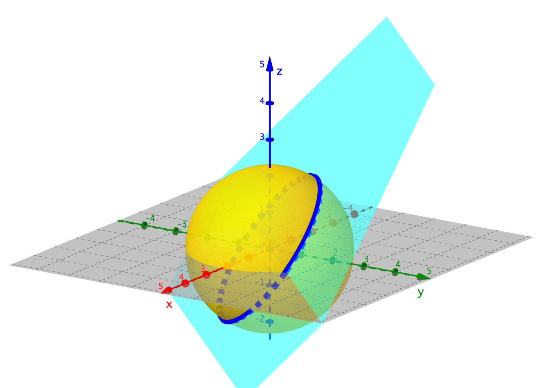


(B) Circonferenza $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3$

Remark 1.3. *L'intersezione della sfera (1.2) con un piano $ax + by + cz = d$ con $d \neq 0$ potrebbe essere un'ellisse! (con $d = 0$ è una circonferenza!)*



(A) Intersezione con il piano $x - y + z = 2$



(B) Intersezione con il piano $x - y + z = 0$

La rappresentazione parametrica della sfera è

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta\,\sin\phi \\ y = r\sin\vartheta\,\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases} \qquad \text{con } (\vartheta,\phi) \in [0,2\pi) \times [0,\pi].$$

L'equazione di una **sfera** di centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raggio r è:

$$\mathbf{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2},$$

la cui rappresentazione parametrica è

$$\begin{cases} x = (x_0 + r\cos\vartheta)\,\cos\phi \\ y = (y_0 + r\sin\vartheta)\,\cos\phi \\ z = z_0 + r\sin\phi \end{cases} \qquad \text{con } (\vartheta,\phi) \in [0,2\pi] \times [0,\pi].$$

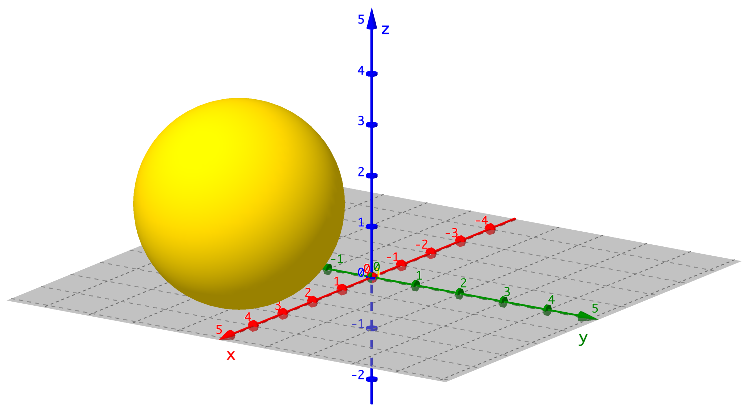


FIGURE 5. Sfera $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$

Più in generale, il luogo dei punti dello spazio le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

è una sfera se e solo se $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$. Tale sfera ha centro $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ e raggio $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$.

2. Paraboloide

Siano $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. L'equazione del **paraboloide ellittico** è

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}}. \tag{2.1}$$

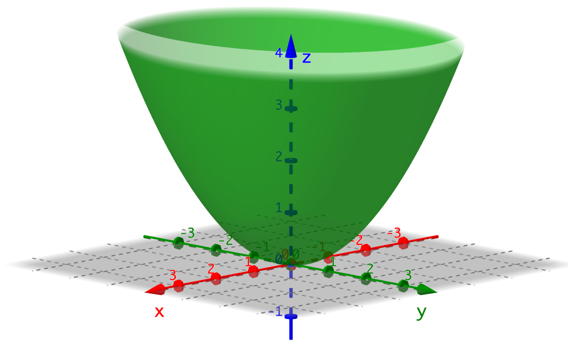


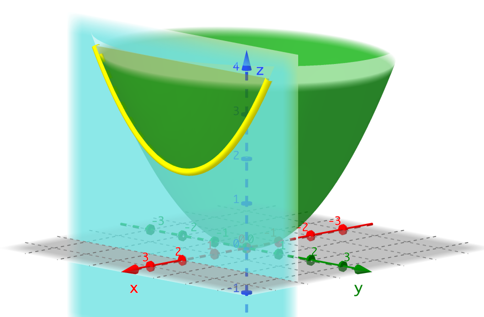
Figure 6. Paraboloide $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$

La rappresentazione parametrica è

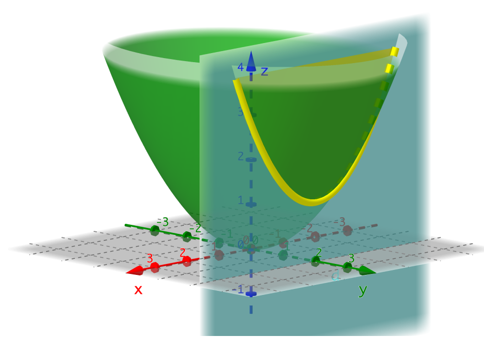
$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}. \end{cases}$$

Le intersezioni del paraboloide con i piani $x = R$ sono le parabole $z = \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{R^2}{a^2}$.

Le intersezioni del paraboloide con i piani $y = R$ sono le parabole $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{R^2}{b^2}$.



(a) Intersezione con $x = 2$



(b) Intersezione con $y = 2$

Le intersezioni del paraboloide con i piani $z = R$ sono le ellissi (di semiassi a, b): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = R$.

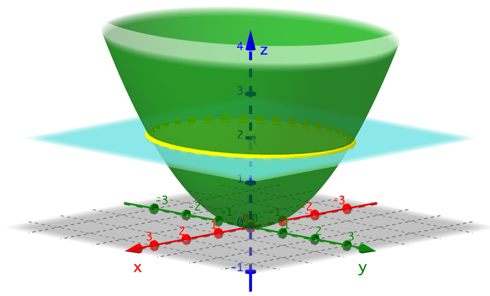


FIGURE 7. Intersezione con $z = 2$

Se $a = b$ in (2.1), otteniamo un **paraboloide di rotazione (paraboloide rotondo)** di equazione

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{x^2} + \mathbf{y^2}}{\mathbf{a^2}}. \tag{2.2}$$

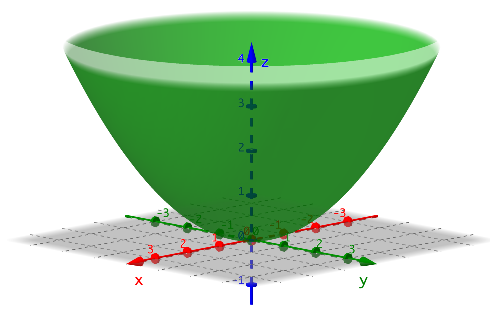
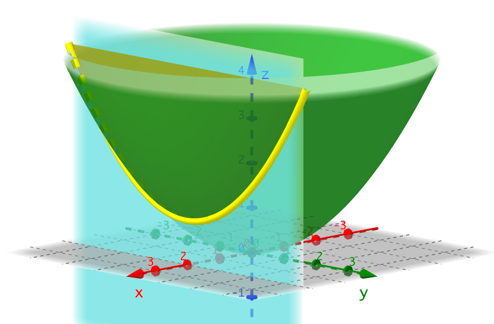


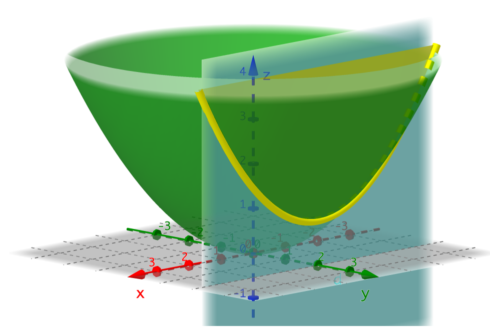
FIGURE 8. Paraboloide $z = \frac{x^2+y^2}{4}$

Le intersezioni del paraboloide con i piani $x = R$ sono le parabole $z = \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{R^2}{a^2}$.

Le intersezioni del paraboloide con i piani $y = R$ sono le parabole $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{R^2}{b^2}$.



(A) Intersezione con $x = 2$



(B) Intersezione con $y = 2$

Le intersezioni del paraboloide con i piani $z = R$ sono le circonferenze $x^2 + y^2 = a^2 R$.

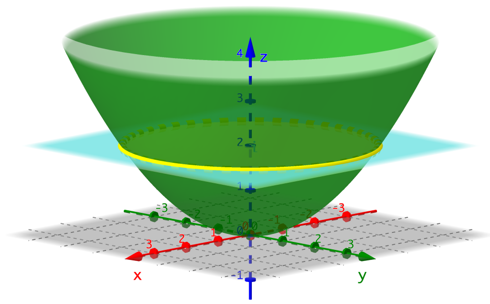


FIGURE 9. Intersezione con $z = 2$

L'equazione del **paraboloide iperbolico (o paraboloide a sella)** è:

$$\mathbf{z} = -\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}}. \tag{2.3}$$

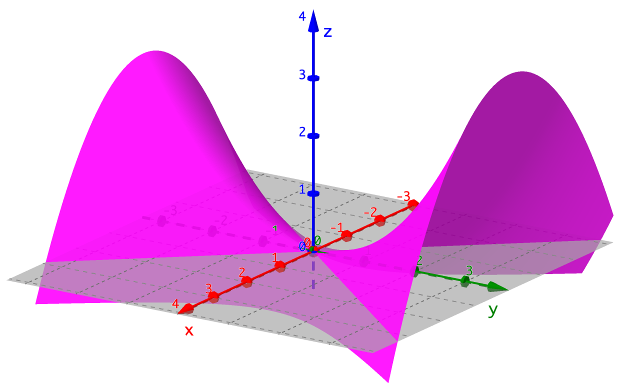


FIGURE 10. Paraboloide $z = -\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4}$

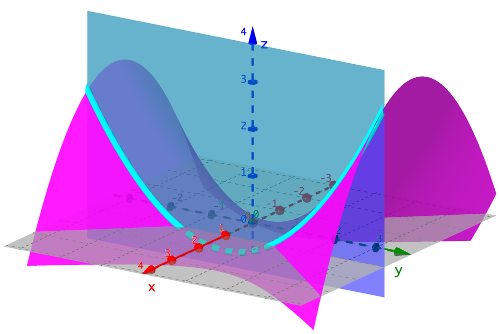
La rappresentazione parametrica è

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}. \end{cases}$$

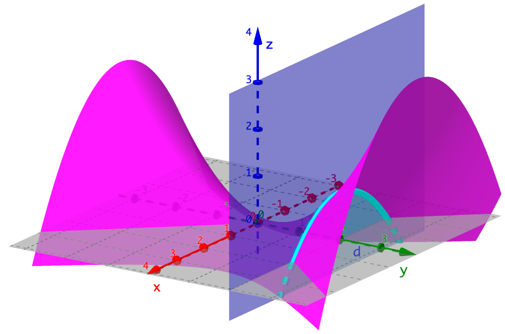
Le intersezioni del paraboloide con i piani $x = R$ sono le parabole $z = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{R^2}{a^2}$.

Le intersezioni del paraboloide con i piani $y = R$ sono le parabole $z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{R^2}{b^2}$.

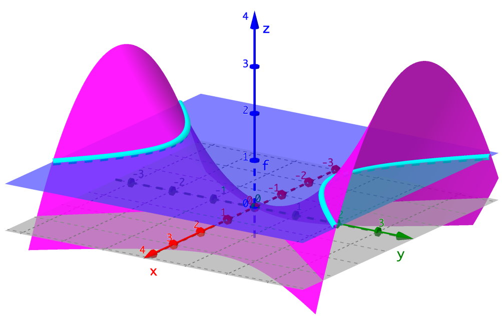
Le intersezioni del paraboloide con i piani $z = R$ sono le iperboli: $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = R$.



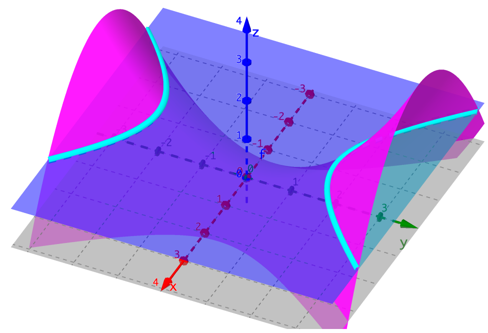
(A) Intersezione con $x = 1$



(B) Intersezione con $y = 2$



(A) Intersezione con $z = 1$



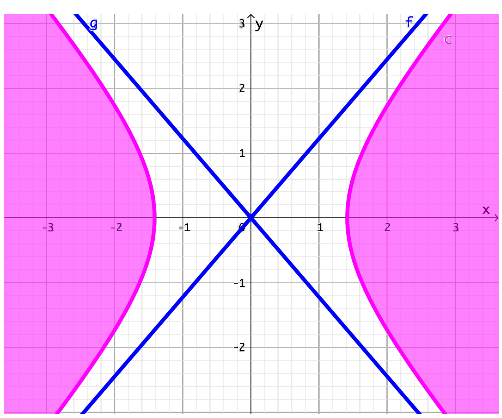
(B) Intersezione con $z = 1$

Remark 2.1. *Equazione generale dell'iperbole:*

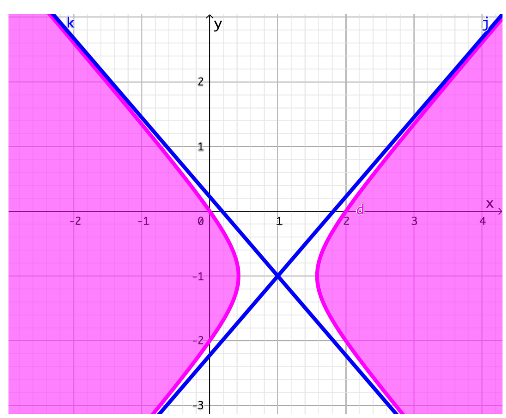
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \textit{asintoti} \ y = \pm\frac{b}{a}x. \tag{2.4}$$

Equazione dell'iperbole con centro $C(x_0, y_0)$*:*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \ \textit{asintoti} \ y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0).$$



(A) Iperbole $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$



(B) Iperbole $3(x-1)^2 - 2(y+2)^2 = 1$

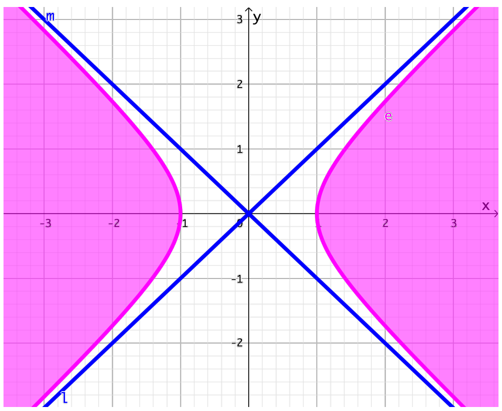
Se $a = b$ *in* (2.4) *otteniamo un'iperbole equilatera di equazione*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (\text{ oppure } x^2 - y^2 = a^2)$$

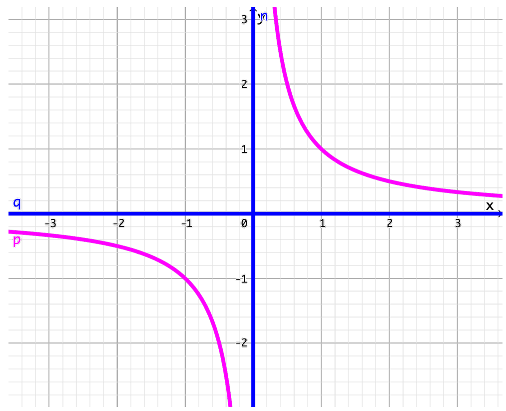
con asintoti $y = \pm x$.

Equazione dell'iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi coordinati:

$$xy = \kappa$$



(A) Iperbole $x^2 - y^2 = 1$



(B) Iperbole $y = \frac{1}{x}$

3. Cono

Siano $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. L'equazione del **cono** è data da

$$\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} - \frac{\mathbf{z^2}}{\mathbf{c^2}} = \mathbf{0}. \tag{3.1}$$

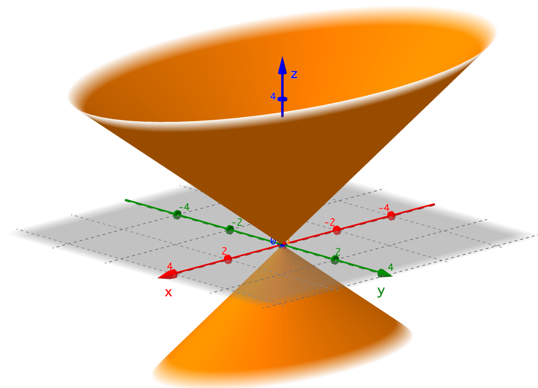
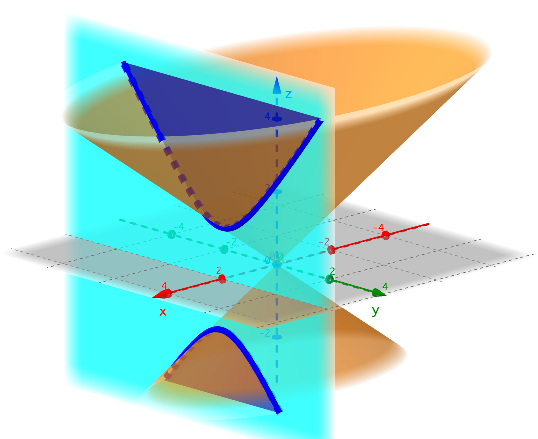


FIGURE 11. Cono $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 0$

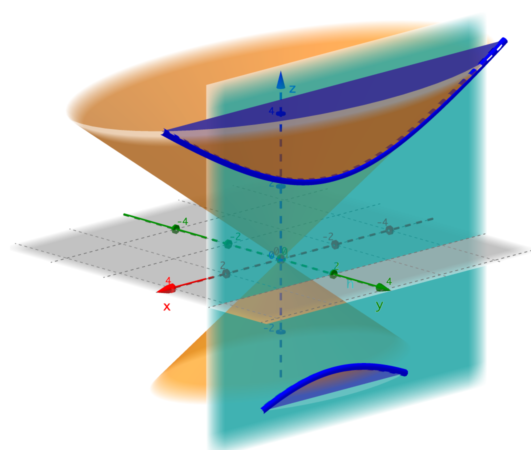
La rappresentazione parametrica è:

$$\begin{cases} x = r\,a\,\cos\vartheta \\ y = r\,b\,\sin\vartheta \qquad \text{con } r \in \mathbb{R} \text{ e } \vartheta \in [0, 2\pi) \\ z = r\,c. \end{cases}$$

Le intersezioni del cono con i piani $x = R$ e $y = R$ sono iperboli.

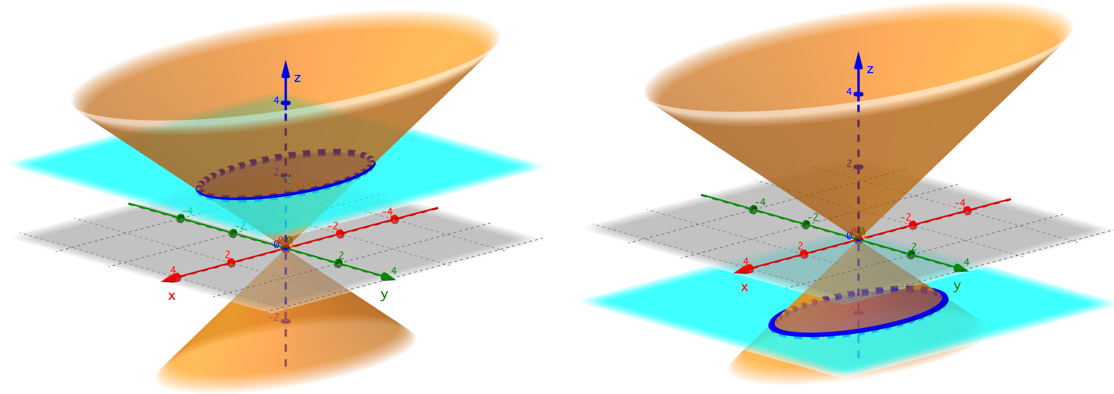


(A) Intersezione con $x = 2$



(B) Intersezione con $y = 2$

Le intersezioni con i piani $z = R$ sono le ellissi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{R^2}{c^2}$.



(A) Intersezione con $z = 2$ (B) Intersezione con $z = -2$

Se $a = b$ in (3.1) allora abbiamo il **cono rotondo** di equazione

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}.$$

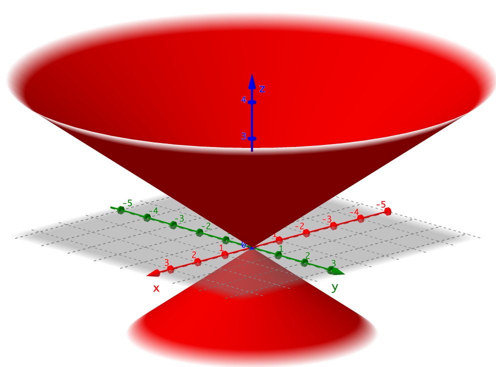
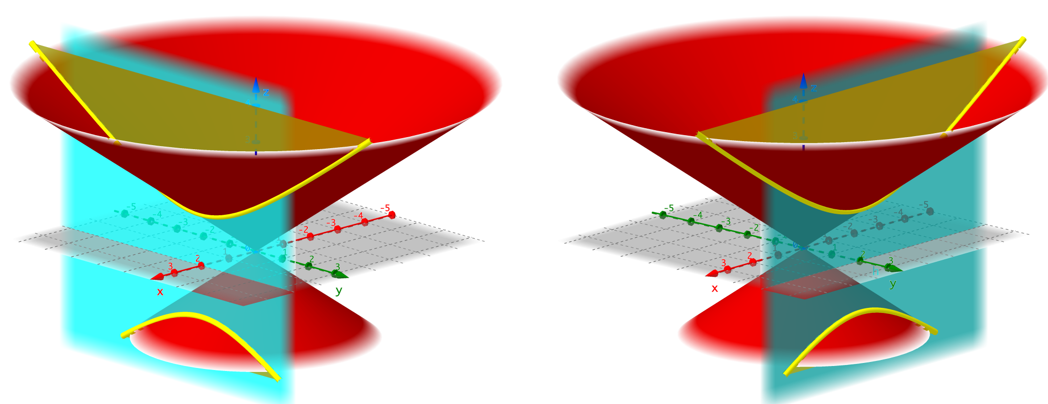


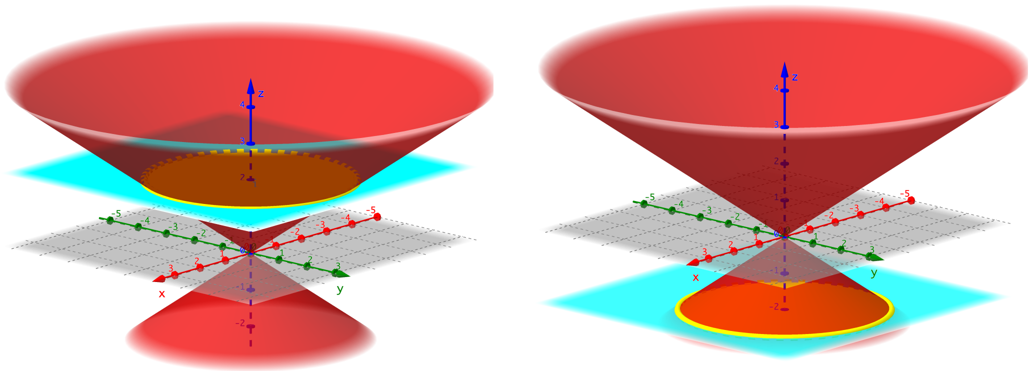
FIGURE 12. Cono $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$

Le intersezioni di tale cono con i piani $x = R$ e $y = R$ sono iperboli.



(A) Intersezione con $x = 2$ (B) Intersezione con $y = 2$

Le intersezioni con i piani $z = R$ sono le circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2} R^2$.



(A) Intersezione con $z = 2$

(B) Intersezione con $z = -2$

La rappresentazione parametrica è:

$$\begin{cases} x = r\, a\, \cos\vartheta \\ y = r\, a\, \sin\vartheta \\ z = r\, c. \end{cases} \qquad \text{con } r \in \mathbb{R} \text{ e } \vartheta \in [0, 2\pi)$$

4. Iperboloide

Siano $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. L'equazione dell'**iperboloide a una falda (o iperboloide iperbolico)** è

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}.$$

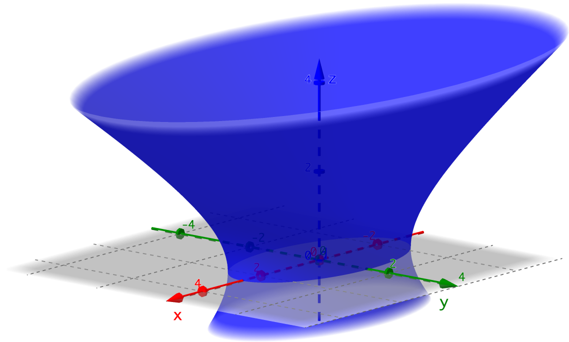
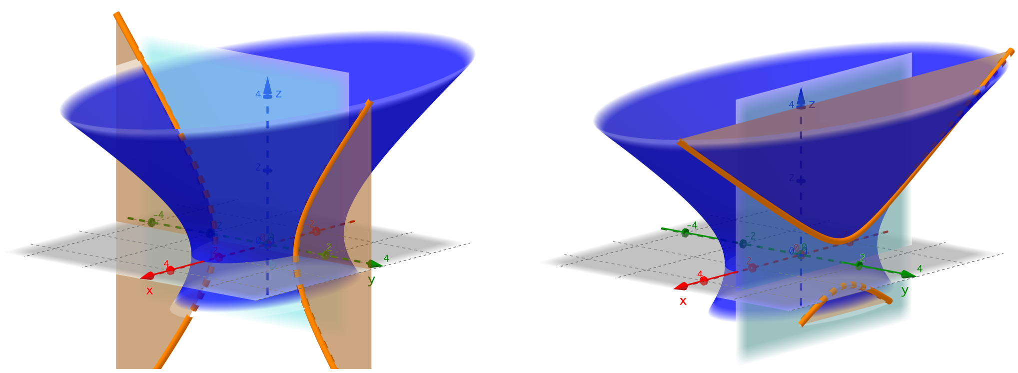


Figure 13. Iperboloide a una falda $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{3} = 1$

Le intersezioni con i piani $x = R$ sono delle iperboli, che risultano equilatere se $b = c$. Le intersezioni con i piani $y = R$ sono delle iperboli, che risultano equilatere se $a = c$.



(a) Intersezione con $x = \frac{1}{2}$

(b) Intersezione con $y = \frac{3}{2}$

Le intersezioni con i piani $z = R$ sono le ellissi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{R^2}{c^2}$.

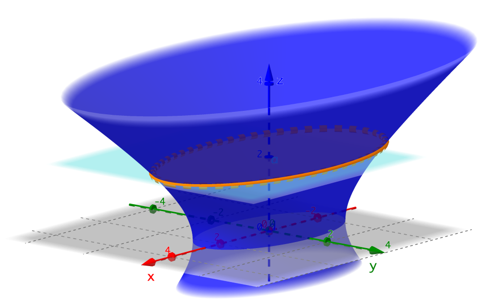


Figure 14. Intersezione con $z = 2$

L'equazione dell' **iperboloide a due falde** è

$$-\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}}+\frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}}-\frac{\mathbf{z^2}}{\mathbf{c^2}}=\mathbf{1}. \tag{4.1}$$

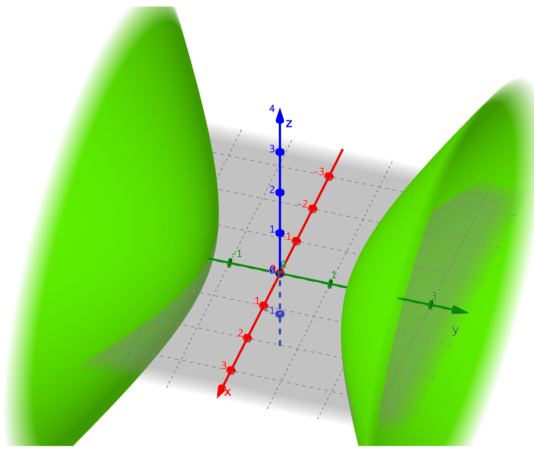
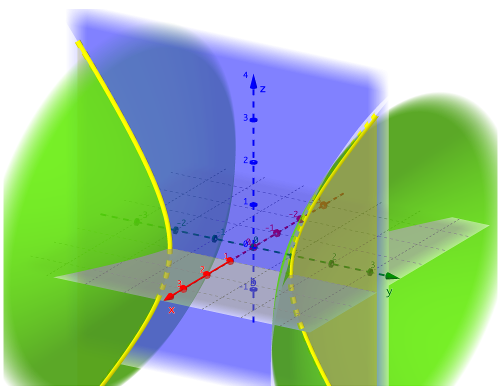
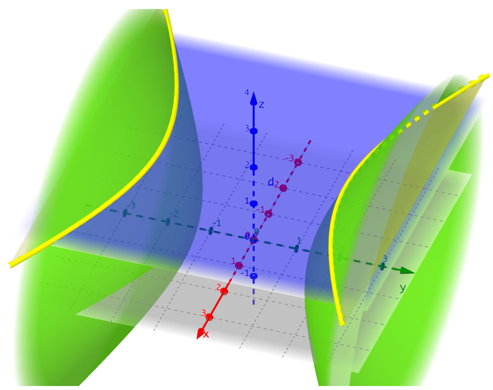


FIGURE 15. Iperboloide a due falde $-\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{3}=1$

Le intersezioni con i piani $x=R$ e $z=R$ sono delle iperboli.



(A) Intersezione con $x=1$



(B) Intersezione con $z=2$

Le intersezioni con i piani $y=R$ sono delle ellissi.

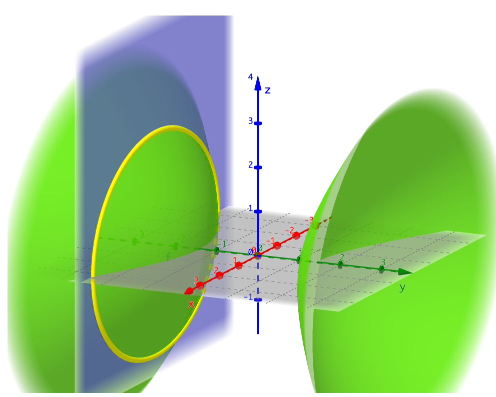


FIGURE 16. Intersezione con $y=-\frac{5}{2}$

Se $a = b$ in (4.1) allora abbiamo un **iperboloide di rotazione** di equazione

$$-\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{a^2}} - \frac{\mathbf{z^2}}{\mathbf{c^2}} = \mathbf{1}.$$

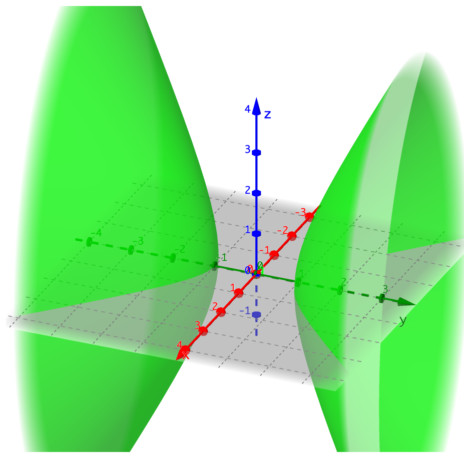
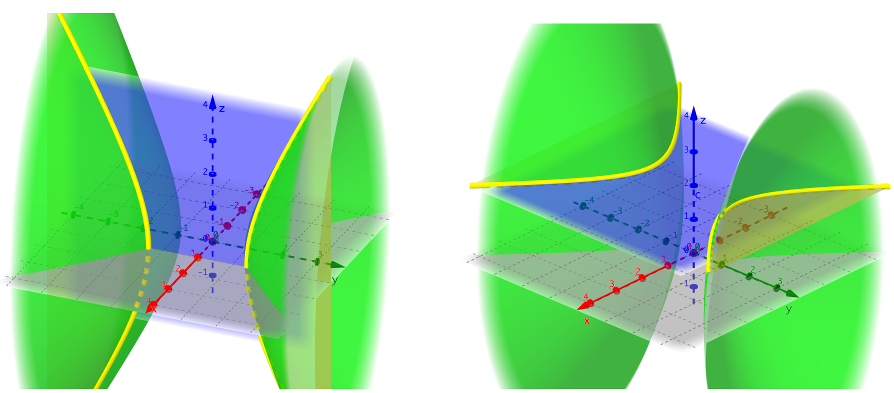


FIGURE 17. Iperboloide di rotazione $-x^2 + y^2 - \frac{z^2}{3} = 1$

Le intersezioni con i piani $x = R$ e $z = R$ sono delle iperboli.



(A) Intersezione con $x = 1$

(B) Intersezione con $z = 2$

Le intersezioni con i piani $y = R$ sono delle ellissi.

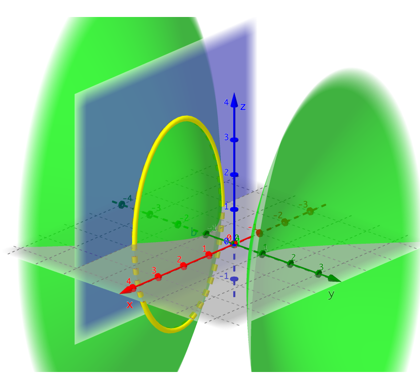


FIGURE 18. Intersezione con $y = -2$

L'equazione dell'**iperboloide a due falde (o iperboloide ellittico)** è

$$-\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} - \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} + \frac{\mathbf{z^2}}{\mathbf{c^2}} = \mathbf{1}. \tag{4.2}$$

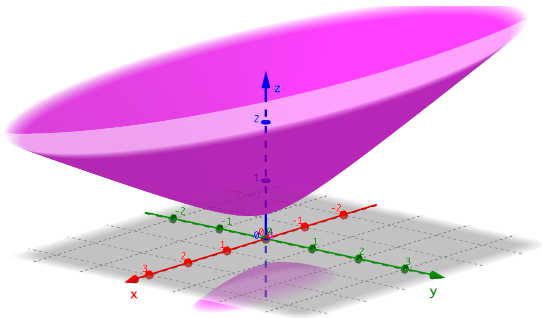
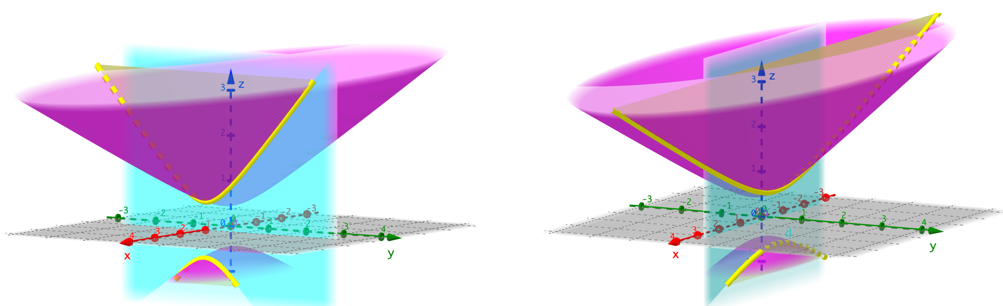


FIGURE 19. Iperboloide ellittico $-x^2 - 7y^2 + 5z^2 = 1$

Le intersezioni con i piani $x = R$ e $y = R$ sono delle iperboli.



(A) Intersezione con $x = 1$ (B) Intersezione con $y = \frac{1}{3}$

Le intersezioni con i piani $z = R$ sono delle ellissi che esistono per $\frac{R^2}{c^2} - 1 > 0$.

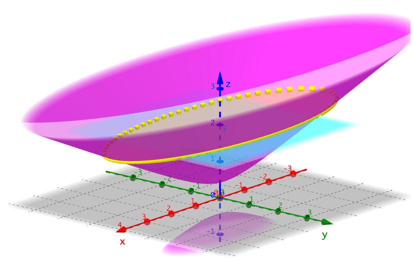


FIGURE 20. Intersezione con $z = 2$

Se $a = b$ in (4.2) allora abbiamo un **iperboloide di rotazione** di equazione

$$-\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} - \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{z^2}}{\mathbf{c^2}} = \mathbf{1}.$$

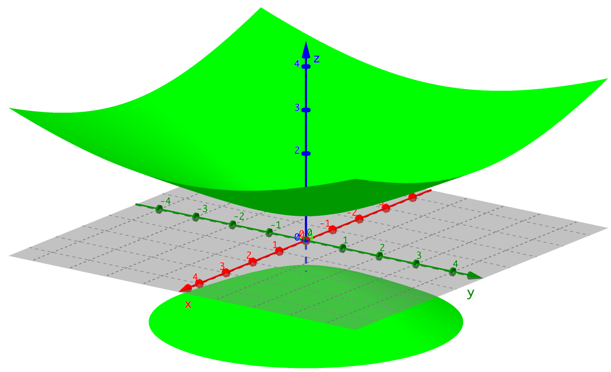
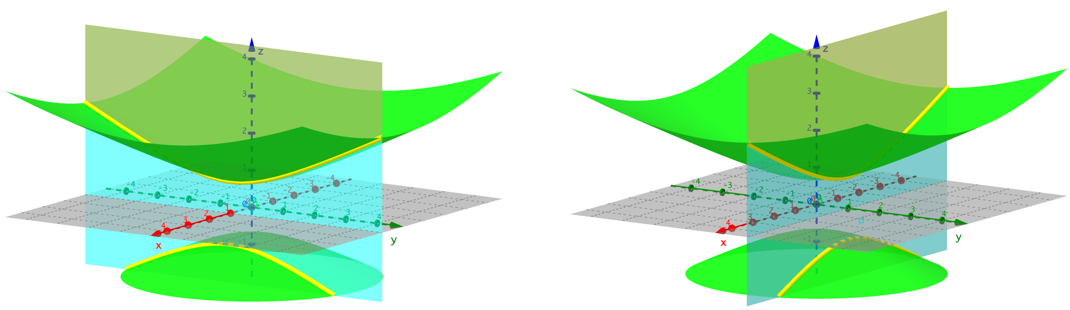


FIGURE 21. Iperboloide di rotazione $-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 2z^2 = 1$

Le intersezioni con i piani $x = R$ e $y = R$ sono delle iperboli.



(A) Intersezione con $x = 1$ (B) Intersezione con $y = 1$

Le intersezioni con i piani $z = R$ sono delle circonferenze.

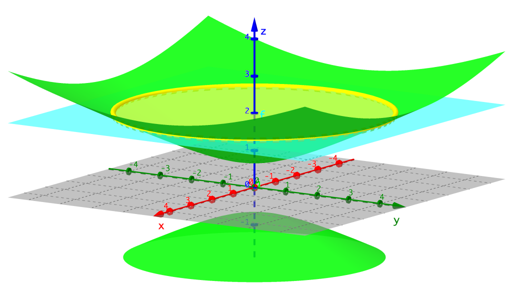


FIGURE 22. Intersezione con $z = 2$

5. Cilindro

Siano $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. L'equazione del **cilindro ellittico** è

$$\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}. \tag{5.1}$$

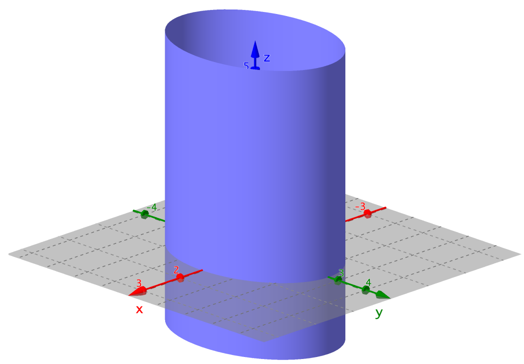
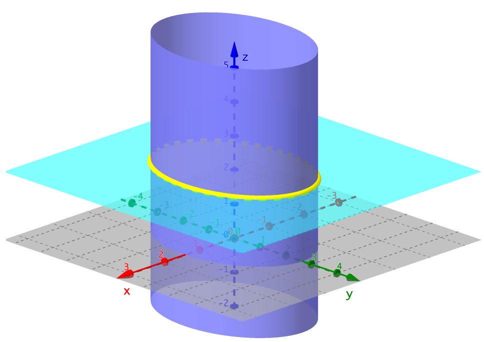
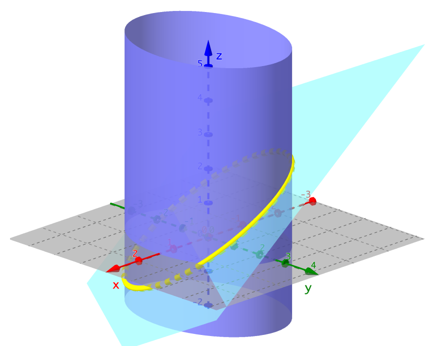


Figure 23. Cilindro ellittico $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{7} = 1$

Le intersezioni con i piani $z = R$ sono delle ellissi.



(A) Intersezione con $z = 2$



(B) Intersezione con $2x - y + 2z = 1$

La rappresentazione parametrica è:

$$\begin{cases} x = a\,\cos\vartheta \\ y = b\,\sin\vartheta \\ z = r \end{cases} \qquad \text{con } r \in \mathbb{R} \text{ e } \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Se $a = b$ in (5.3), allora abbiamo un **cilindro di rivoluzione** di equazione

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}.$$

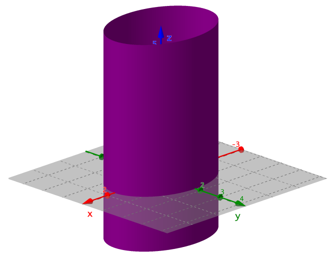


FIGURE 24. Cilindro di rivoluzione $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 1$

Le intersezioni con i piani $z = R$ sono delle circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = a^2$.

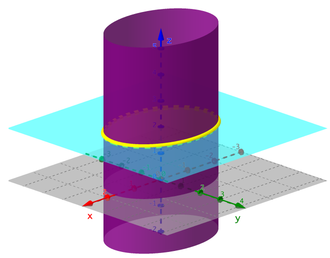
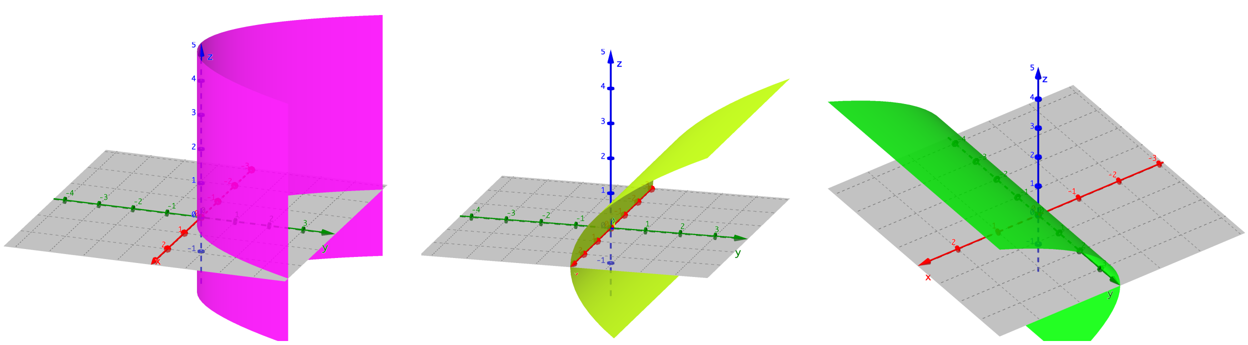


FIGURE 25. Intersezione con $z = 2$

L'equazione del **cilindro parabolico** è data da

$$\mathbf{y = \frac{x^2}{a^2}, \quad y = \frac{z^2}{c^2}, \quad x = \frac{z^2}{c^2}}.$$



(A) Cilindro parabolico $y = \frac{x^2}{2}$

(B) Cilindro parabolico $y = \frac{z^2}{2}$

(C) Cilindro parabolico $x = \frac{z^2}{2}$

L'equazione del **cilindro iperbolico** è

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{5.2}$$

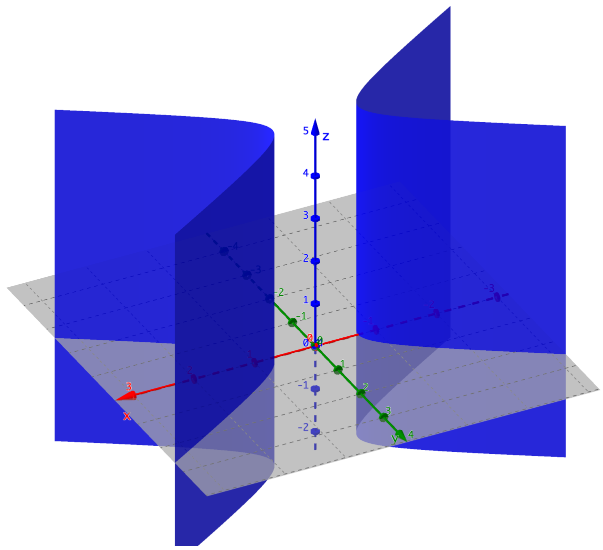


FIGURE 26. Cilindro iperbolico $2x^2 - 3y^2 = 1$

L'equazione del **cilindro lemniscato** è

$$\mathbf{(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).} \tag{5.3}$$

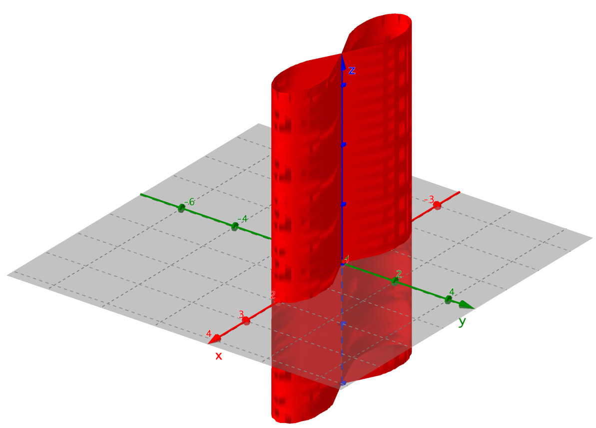


FIGURE 27. Cilindro lemniscato

La rappresentazione parametrica è:

$$\begin{cases} x = \pm a\sqrt{\cos(2\vartheta)}\cos\vartheta \\ y = \pm a\sqrt{\cos(2\vartheta)}\sin\vartheta \\ z = u \end{cases}$$

Teresa Isernia
Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche
Università Politecnica delle Marche
Via Brecce Bianche, 12
60131 Ancona (Italy)
E-mail address: t.isernia@univpm.it