1 Campi conservativi e potenziali

Ricordiamo che un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice **connesso** se per ogni coppia di punti $P_1, P_2 \in A$ esiste una curva γ, contenuta in A, generalmente regolare, che li congiunge.

Definizione 1.1 Una funzione continua $F : A \to \mathbb{R}^n$, con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, si dice **campo vettoriale** (mentre le funzioni continue $f : A \to \mathbb{R}$ si chiamano **campi scalari**).

Definizione 1.2 Dato un campo vettoriale $F : A \to \mathbb{R}^n$ e una curva γ generalmente regolare contenuta in A, si definisce **lavoro del campo F lungo la curva γ** la quantità

$$\mathcal{L}(F;\gamma) = \int_\gamma \langle F, T\rangle \, \mathrm{d}s \tag{1.1}$$

dove T è il versore tangente alla curva γ.

Dalla definizione di integrale curvilineo si deduce che

$$\mathcal{L}(F;\gamma) = \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}\rangle \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle \, \mathrm{d}t = \int_\gamma F_1 \, \mathrm{d}x_1 + \cdots + F_n \, \mathrm{d}x_n$$

dove $F(x_1, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n))$ e $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è una parametrizzazione di γ.
Se si cambia parametrizzazione alla curva mantenendo lo stesso orientamento il lavoro non cambia, infatti l'integrale curvilineo non dipende dalla parametrizzazione e il versore tangente rimane lo stesso. Invece se ci cambia l'orientamento della curva allora il lavoro cambia segno, perché il versore tangente è l'opposto di quello della parametrizzazione iniziale.

Definizione 1.3 *Un campo $F : A \to \mathbb{R}^n$ si dice* **conservativo** *se il lavoro lungo ogni curva contenuta in A, generalmente regolare e* **chiusa***, è nullo.*

Osserviamo che **un campo F è conservativo se e solo se il lavoro lungo una curva dipende solo dai punti iniziali e finali e non dipende dal percorso**. Infatti, date due curve generalmente regolari γ_1 e γ_2 contenute in A, aventi gli stessi punti iniziale e finale, denotiamo con γ la curva ottenuta congiungendo γ_1 con $-\gamma_2$ (cioè la curva γ_2 orientata in senso opposto). Allora la curva γ è generalmente regolare e chiusa. Inoltre,

$$\int_\gamma \langle F, T\rangle \, \mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} \langle F, T\rangle \, \mathrm{d}s - \int_{\gamma_2} \langle F, T\rangle \, \mathrm{d}s$$

Quindi

$$\int_\gamma \langle F, T\rangle \, \mathrm{d}s = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{\gamma_1} \langle F, T\rangle \, \mathrm{d}s = \int_{\gamma_2} \langle F, T\rangle \, \mathrm{d}s.$$

Definizione 1.4 Dato un campo $F : A \to \mathbb{R}^n$, una funzione $U : A \to \mathbb{R}$ si dice **potenziale di F** se U è differenziabile e $\nabla U = F$, cioè se $\frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = F_i(x_1, \ldots, x_n)$, per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Osserviamo che se un campo ammette un potenziale $U(x_1, \ldots, x_n)$, allora ne ammette infiniti, dato che $U(x_1, \ldots, x_n) + k$, con k costante reale, è ancora un potenziale. Inoltre, se A è connesso allora tutti i potenziali differiscono tra loro per una costante. Infatti se U e V sono due potenziali di F allora la funzione $U - V$ è differenziabile ed ha tutte le derivate parziali nulle. Quindi se A è connesso la funzione $U - V$ è costante.

Per i campi conservativi vale il seguente risultato, analogo alla formula fondamentale del calcolo integrale per funzioni di una variabile.

Teorema 1.5 *Dato un campo $F : A \to \mathbb{R}^n$, con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto connesso, il campo F è conservativo se e solo se ammette potenziali.*

Inoltre, se ammette potenziali allora per ogni curva γ generalmente regolare contenuta in A si ha

$$\int_\gamma \langle F, T \rangle \, \mathrm{d}s = U(P_2) - U(P_1) \tag{1.2}$$

dove P_1 e P_2 sono rispettivamente il punto iniziale e il punto finale di γ, ed U è un qualunque potenziale

Dimostrazione. (Parte necessaria) - Sia F un campo conservativo. Fissato un punto $P_0 \in A$, dato che A è connesso per ogni altro punto $P \in A$ esiste almeno una curva γ generalmente regolare contenuta in A che congiunge P_0 e P. Definiamo allora

$$U(P) := \int_\gamma \langle F, T \rangle \, \mathrm{d}s.$$

Dato che il lavoro non dipende dal percorso, ma solo dai punti iniziali e finali, quella precedente è una "buona definizione", poiché l'integrale curvilineo è effettivamente una funzione che dipende solo da P (una volta fissato il punto P_0).

Dimostriamo ora che la funzione U così definita è derivabile rispetto alla variabile x_1 nel punto $P = (x_1, \ldots, x_n)$ (la dimostrazione della derivabilità rispetto alle altre variabili è analoga). A tale scopo, fissato un incremento $h \in \mathbb{R}$, denotiamo con $Q = (x_1 + h, x_2, \ldots, x_n)$ e sia $\overline{PQ}$ il segmento congiungente P e Q, parametrizzato da $x_1(t) = x_1 + th$, $x_2(t) = x_2, \ldots, x_n(t) = x_n$, per $t \in [0, 1]$. Sia γ^* la curva ottenuta concatenando γ con $\overline{PQ}$. Dato che il lavoro dipendo solo dai punti iniziali e finali e non dal percorso, si ha che

$$U(Q) = \int_{\gamma^*} \langle F, T \rangle \, \mathrm{d}s = \int_\gamma \langle F, T \rangle \, \mathrm{d}s + \int_{\overline{PQ}} \langle F, T \rangle \, \mathrm{d}s = U(P) + \int_{\overline{PQ}} \langle F, T \rangle \, \mathrm{d}s,$$

quindi

$$\frac{U(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n)) - U(x_1, x_2, \ldots, x_n))}{h} = \frac{U(Q) - U(P)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\overline{PQ}} \langle F, T \rangle \, \mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^1 \langle F(x_1+th,x_2,\dots,x_n),(h,0,\dots,0)\rangle \, \mathrm{d}t = \frac{1}{h}\int_0^1 hF_1(x_1+th,x_2,\dots,x_n)\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 F_1(x_1+th,x_2,\dots,x_n)\, \mathrm{d}t = F_1(x_1+\bar{t}_h h, x_2,\dots,x_n)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo applicato il Teorema della media integrale e $\bar{t}_h$ è un punto interno a $[0,1]$. Passando al limite per $h \to 0$ si ha che $(x_1+\bar{t}_h h) \to x_1$ e per la continuità di F_1 si deduce che

$$\lim_{h\to 0} \frac{U(x_1+h,x_2,\dots,x_n)) - U(x_1,x_2,\dots,x_n))}{h} = F_1(x_1,\dots,x_n),$$

quindi esiste $\frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n) = F_1(x_1,\dots,x_n)$.

Dato che U è derivabile e le sue derivate parziali sono continue (perché il campo F è continuo), per il Teorema del differenziale si ottiene che U è differenziabile.

Infine, fissiamo due punti P_1 e P_2 di A e una generica curva γ che li congiunge. Denotando con γ_1 una generica curva congiungente P_0 e P_1 e con γ_2 la curva ottenuta concatenando γ_1 e γ, si ha

$$U(P_2) - U(P_1) = \int_{\gamma_2} \langle F,T\rangle \, \mathrm{d}s - \int_{\gamma_1} \langle F,T\rangle \, \mathrm{d}s = \int_{\gamma} \langle F,T\rangle \, \mathrm{d}s$$

cioè il lavoro lungo γ coincide con la differenza di potenziale agli estremi della curva e la (1.2) vale.

(Parte sufficiente) Sie F un campo che ammette potenziale U, cioè tale che $F = \nabla U$. Allora, data una qualunque curva γ congiungente due punti P_1 e P_2, parametrizzata mediante $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, per la definizione di lavoro si ha

$$\int_\gamma \langle F,T\rangle \, \mathrm{d}s = \int_a^b \langle F(\varphi(t),\varphi'(t)\rangle \, \mathrm{d}t = \int_a^b \langle \nabla U(\varphi(t)),\varphi'(t))\rangle \, \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{d}{\mathrm{d}t} U(\varphi(t))\, \mathrm{d}t =$$

$$U(\varphi(b)) - U(\varphi(a)) = U(P_2) - U(P_1).$$

Quindi vale la (1.2). Inoltre, se la curva è chiusa si ha $P_1 = P_2$ e il lavoro è nullo; pertanto il campo è conservativo. $\square$

Generalmente in Fisica l'energia potenziale E relativa ad un campo di forze conservativo viene definita come $-U$, l'opposto del potenziale qui definito. Il motivo è che per convenzione si assume che un campo di forze compie lavoro positivo quando l'energia potenziale diminuisce. Invece nella (1.2) se il lavoro è positivo allora $U(P_2) > U(P_1)$, il potenziale aumenta; quindi si pone $E = -U$ ed il lavoro vale $E(P_1) - E(P_2)$.

Analizziamo ora alcune condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinché un campo ammetta potenziale (cioè sia conservativo).

Definizione 1.6 Un campo $F : A \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 si dice **irrotazionale** se

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad \text{per ogni } i \neq j. \tag{1.3}$$

In $\mathbb{R}^2$ la condizione (1.3) corrisponde ad una sola uguaglianza: $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$; mentre in $\mathbb{R}^3$ si traduce in 3 uguaglianze:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}.$$

Proposizione 1.7 *Sia F un campo conservativo di classe C^1. Condizione necessaria affinché F sia conservativo è che sia irrotazionale.*

Dimostrazione. Se F è conservativo e di classe C^1 allora ammette potenziale U di classe C^2, perché le derivate prime di U sono di classe C^1. Per il Teorema di Schwarz, se $i \neq j$ si ha

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i},$$

quindi F è irrotazionale. □

Osserviamo che la condizione necessaria appena provata in generale non è sufficiente, cioè esistono campi irrotazionali che non sono conservativi, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1.8 Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ il campo definito da

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \, , \, \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

Si verifica facilmente che

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \text{per ogni } (x,y) \neq (0,0)$$

quindi il campo è irrotazionale. Tuttavia il lavoro lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 (che è una curva chiusa) vale

$$\int_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t) \, dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = 2\pi,$$

quindi il campo non è conservativo. Come si può vedere anche nella figura (cfr. Fig. 1), data una curva che circonda l'orgine in senso antiorario, in ogni punto il suo versore tangente forma un angolo acuto con il vettore del campo, quindi il prodotto scalare è positivo e il lavoro totale è positivo. Invece se una curva è orientata in senso orario, il prodotto scalare tra il versore tangente e il vettore del campo è negativo in ogni punto e il lavoro totale è negativo.

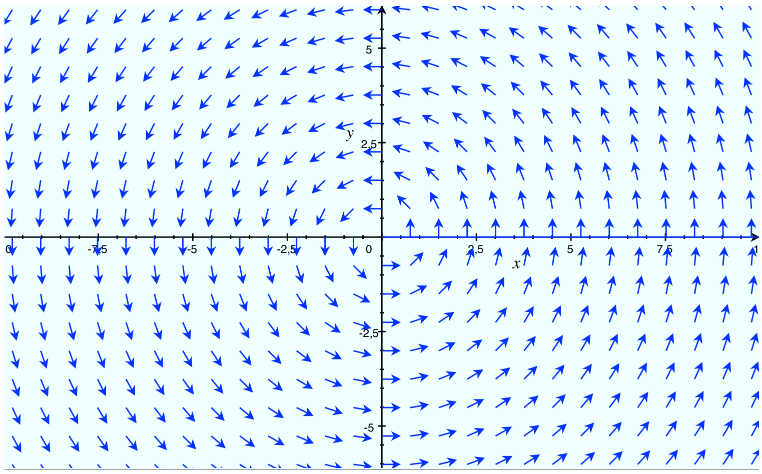

Fig. 1: campo $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

Tuttavia, se il dominio A ha una particolare proprietà geometrica, che introduciamo nella prossima definizione, allora la condizione necessaria (1.3) diventa anche sufficiente. Iniziamo col trattare il caso piano ($n = 2$).

Definizione 1.9 Un aperto connesso $A \subset R^2$ si dice **semplicemente connesso** se ogni curva γ chiusa, generalmente regolare, contenuta in A, è il bordo di un dominio regolare tutto contenuto in A, cioè se $\gamma = \partial D$ per qualche dominio regolare $D \subset A$.

L'insieme $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso perché la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 è il bordo del cerchio di centro l'origine e raggio 1, che non è interamente contenuto in A. Invece, sono domini semplicemente connessi i rettangoli (anche illimitati), i cerchi, l'intero piano $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.10 *Sia $F : A \to R^2$, $A \subset \mathbb{R}^2$, un campo irrotazionale di classe C^1, con A semplicemente connesso. Allora il campo è conservativo.*

Dimostrazione. Sia γ una curva generalmente regolare, chiusa, contenuta in A. Allora $\gamma = \partial D$ con D dominio regolare contenuto in A. Per la Formula di Stokes si ha

$$\int_\gamma \langle F, T\rangle \, \mathrm{d}s = \int_\gamma (F_1 \, \mathrm{d}x + F_2 \, \mathrm{d}y) = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Quindi il campo è conservativo. □

Pertanto, le condizioni congiunte che F sia irrotazionale ed il dominio sia semplicemente connesso, sono sufficienti a garantire che il campo è conservativo. Tuttavia mentre l'irrotazionalità è una condizione necessaria affinché il campo sia conservativo, il fatto che il dominio sia semplicemente connesso non è una condizione necessaria, cioè esistono campi conservativi il cui dominio (massimale) non è semplicemente connesso. Ad esempio, il campo

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} \ , \ \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, è conservativo, dato che ammette potenziale $U(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$.

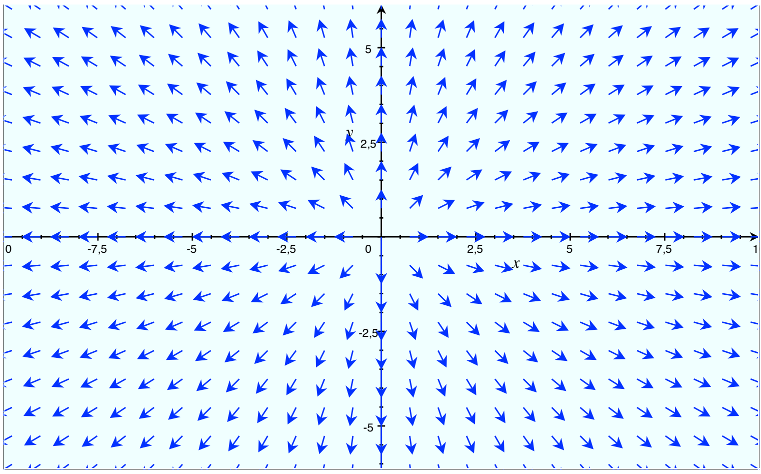

Fig. 2: campo $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} \ , \ \frac{y}{x^2+y^2} \right)$

Nel caso in cui si abbia un campo irrotazionale definito in un dominio che non è semplicemente connesso, si può calcolare il lavoro lungo curve chiuse che circondano le singolarità . Se si trovano valori non nulli per il lavoro, allora il campo non è conservativo. Invece se per ogni singolarità è possibile trovare una curva chiusa che la circonda, lungo la quale il lavoro è nullo, allora il campo è conservativo, come conseguenza della formula di Stokes.

Osserviamo infine che come conseguenza del Teorema 1.10 si ha che

un campo irrotazionale è localmente conservativo

cioè se un campo F è irrotazionale, allora per ogni punto $P_0 \in A$ esiste un intorno $B(P_0,r) \subset A$ in cui il campo è conservativo. perché gli intorni $B(P_0,r) \subset A$ sono insiemi semplicemente connessi. Quindi, dato un campo irrotazionale, è sempre possibile definire dei potenziali locali, ma questi non forniscono in generale un potenziale globale. Infatti, tornando al campo dell'Esempio 1.8, potremmo definire i seguenti potenziali locali:

$$U(x,y) = \arctan\frac{y}{x} + K \quad \text{nei semipiani } x>0 \text{ e } x<0$$

$$U(x,y) = -\arctan\frac{x}{y} + C \quad \text{nel semipiani } y>0 \text{ e } y<0$$

con K, C costanti reali, ma non è possibile definire un potenziale $U(x,y)$ nell'intero dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, nemmeno scegliendo le constanti in modo opportuno.

Infatti, ricordando che

$$\arctan\frac{1}{\alpha} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\alpha & \text{se } \alpha > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\alpha & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

definendo $U(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$ nel semipiano $x > 0$ e $U(x,y) = -\arctan\frac{y}{x} + C$ nel semipiano $y > 0$, per raccordarli nel pimo quadrante (in cui $\frac{x}{y} > 0$) occorre prendere $C = \frac{\pi}{2}$. Quindi deve essere $U(x,y) = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{y}{x}$ nel semipiano $y > 0$. Analogamente per definire U nel semipiano $x < 0$ raccordandolo alla U già definita nel secondo quadrante (in cui $\frac{x}{y} > 0$), occorre scegliere $K = \pi$ cioè definire $U(x,y) = \pi + \arctan\frac{y}{x}$ per $x < 0$. Infine, per definire U nel semipiano $y < 0$ in modo che sia compatibile nel terzo quadrante con la U appena definita, occorre scegliere $C = \frac{3}{2}\pi$, cioè porre $U(x,y) = \frac{3}{2}\pi - \arctan\frac{x}{y}$ per $y < 0$. A questo punto però si osserva che nel quarto quadrante tra la U appena definita e quella iniziale c'è uno scarto di 2π, perché nel quarto quadrante si ha $\frac{3}{2}\pi - \arctan\frac{x}{y} = 2\pi + \arctan\frac{y}{x}$. Quindi non esiste un potenziale globale.

Nello spazio $\mathbb{R}^3$ la proprietà geometrica di dominio "semplicemente connesso" si definisce nel modo seguente:

Definizione 1.11 Un aperto connesso $A \subset R^3$ si dice **semplicemente connesso** se ogni curva γ chiusa, generalmente regolare, contenuta in A, è il bordo di una superficie regolare tutta contenuta in A, cioè se $\gamma = \partial S$ per qualche superficie regolare S.

Ad esempio, $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ è semplicemente connesso, mentre $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z), z \in \mathbb{R}\}$ non lo è . Anche in $\mathbb{R}^3$ vale la seguente condizione sufficiente.

Teorema 1.12 *Sia $F : A \to R^3$, $A \subset \mathbb{R}^3$, un campo irrotazionale di classe C^1, con A semplicemente connesso. Allora il campo è conservativo.*

Dimostrazione. Dato che A è semplicemente connesso, ogni curva chiusa γ è il bordo di una superficie regolare S contenuta in A, cioè $\gamma = \partial S$. Per la Formula di Stokes in $\mathbb{R}^3$ si ha

$$\int_\gamma \langle F, T\rangle \, \mathrm{d}s = \int_{\partial S} F_1 \, \mathrm{d}x + F_2 \, \mathrm{d}y + F_3 \, \mathrm{d}z = \pm \int_S \langle \mathrm{rot} F, \nu\rangle \, \mathrm{d}\sigma = 0$$

(il segno $\pm$ dipende dall'orientamento della curva γ). Quindi il campo è conservativo. $\square$