Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 12 gennaio 2016– $\boxed{A}$

(1) Fornire la definizione estremo superiore, la sua caratterizzazione e provare il Teorema che ne assicura l'esistenza.

(2) Enunciare e dimostrare il criterio di integrabilità.

(3) Provare che una serie a termini non negativi è convergente o divergente.

(4) Sia $f(x)$ funzione positiva e continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b). Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Se $f(x)$ è crescente in $[a, b]$ allora $\frac{1}{f(x)}$ è decrescente in $[a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. Se $f(x)$ è concava in (a, b) allora $\frac{1}{f(x)}$ è concava in (a, b). $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. Se $f(x)$ è strettamente decrescente in $[a, b]$ allora $f^{-1}(x)$ è strettamente decrescente in $f([a, b])$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) Per provare che una serie a termini non negativi è convergente o divergente, ricordiamo che una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è detta convergente (rispettivamente divergente) se la successione delle somme parziali $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ risulta convergente (rispettivamente divergente). Se i termini della serie sono non negativi, avremo che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in I\!N$ e quindi che per ogni $k \in I\!N$ risulta

$$s_{k+1} = \sum_{n=1}^{k+1} a_n = a_{k+1} + \sum_{n=1}^{k} a_n = a_{k+1} + s_k \geq s_k.$$

La successione delle somme parziali $(s_k)_{k \in I\!N}$ è dunque monotona crescente. Dal Teorema di regolarità delle successioni monotone tale successione ammette limite (finito o infinito) e dunque risulta convergente oppure divergente. Ne segue che anche la corrispondente serie risulta convergente oppure divergente.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, se $x_1, x_2 \in [a,b]$ e $x_1 < x_2$ allora, essendo $f(x)$ crescente e positiva avremo che $0 < f(x_1) \leq f(x_2)$ e dunque $\frac{1}{f(x_1)} \geq \frac{1}{f(x_2)}$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è continua e positiva in $[1,2]$ e concava in $(1,2)$ mentre $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ è convessa in $(1,2)$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, se $f(x)$ è strettamente crescente in $[a,b]$, per $x_1, x_2 \in [a,b]$ risulta

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Presi $y_1, y_2 \in f([a,b])$, siano $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$ allora $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$ e quindi

$$y_1 < y_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 12 gennaio 2016 – $\boxed{\text{B}}$

(1) Fornire la definizione di funzione integrabile secondo Riemann, partendo dalla definizione di partizione, somme integrali inferiore e superiore, integrale inferiore e superiore. Fornire un esempio di funzione limitata non integrabile.

(2) Enunciare e dimostrare la Proprietà Archimedea.

(3) Provare che l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ con $f(x)$ continua e non negativa in $[a, +\infty)$ converge oppure diverge.

(4) Sia $f(x)$ funzione positiva e continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b). Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Se $f(x)$ è convessa in (a, b) allora $\frac{1}{f(x)}$ è concava. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. Se $f(x)$ è convessa in (a, b) allora $f^{-1}(x)$ è convessa in $f((a, b))$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. Se $f(x)$ è decrescente in $[a, b]$ allora $\frac{1}{f(x)}$ è crescente in $[a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) Per provare che l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ con $f(x)$ continua e non negativa in $[a,+\infty)$ converge oppure diverge, ricordiamo che per definizione

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b)$$

dove $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale, essendo $f(x)$ continua in $[a,+\infty)$ abbiamo che $F(x)$ risulta derivabile in $(a,+\infty)$ con $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (a,+\infty)$. Dato che per ipotesi $f(x)$ è non negativa, ne deduciamo che $F'(x) \geq 0$ in $(a,+\infty)$ e quindi, dal criterio di monotonia, che $F(x)$ è crescente in $[a,+\infty)$. Dal Teorema sul limite di funzioni monotone possiamo allora concludere che il limite $\lim_{b\to+\infty} F(b)$ esiste, finito o infinito, ovvero che l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge oppure diverge.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. La funzione $f(x) = x^2$ è continua e positiva in $[1,2]$ e convessa in $(1,2)$ ma anche $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2}$ è convessa in $(1,2)$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. La funzione $f(x) = x^2$ è continua e positiva in $[1,2]$ e convessa in $(1,2)$ mentre la funzione $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ è concava in $f((1,2)) = (1,4)$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, se $x_1, x_2 \in [a,b]$ e $x_1 < x_2$ allora, essendo $f(x)$ decrescente e positiva avremo che $f(x_1) \geq f(x_2) > 0$ e dunque $\frac{1}{f(x_1)} \leq \frac{1}{f(x_2)}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 6 febbraio 2016

(1) Fornire la definizione di integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, enunciare i criteri del confronto e del confronto asintotico per tale integrale.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di esistenza degli zeri.

(3) Enunciare il Principio di induzione e utilizzarlo per provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$1 + x + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad \forall x \neq 1.$$

(4) Sia $f(x)$ funzione derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata $f'(x)$ limitata in $\mathbb{R}$ e sia $M = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)**, **(2)** e **(3)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Ad esempio, la funzione $f(x) = x$ è derivabile con derivata $f'(x) = 1$ limitata in $I\!R$ ma $f(x)$ non risulta limitata in $I\!R$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti, presi $x, y \in I\!R$, se $x < y$, la funzione verifica le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[x, y]$, quindi esiste $x_0 \in (x, y)$ tale che $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(x_0)$, da cui, essendo $|f(x_0)| \leq M$ otteniamo che

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(x_0)| \leq M \quad \Leftrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti lrisultano verificate le ipotesi del Teorema di de l'Höpital per $x \to +\infty$ e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{2x} = 0$$

dato che $f'(x)$ è funzione limitata e $\frac{1}{2x} \to 0$ per $x \to +\infty$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 22 febbraio 2016

(1) Fornire la definizione di funzione continua e la classificazione delle discontinuità, illustrando di ciascun caso un esempio.

(2) Enunciare e dimostrare il Criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno.

(3) Fornire la regola di derivazione della funzione inversa e utilizzarla per provare che per ogni $x > 1$ la derivata di $\operatorname{settcosh} x$ è $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

(4) Sia $f(x)$ funzione continua e strettamente crescente in $[0, +\infty)$ e sia $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $F(x)$ ammette minimo in $[0, +\infty)$. Vero Falso

B. $F(x)$ è convessa in $[0, +\infty)$. Vero Falso

C. Esiste $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. Vero Falso

Soluzione

Per i quesiti **(1)**, **(2)** e **(3)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Ad esempio, la funzione $f(x) = -e^{-x}$ è continua e strettamente crescente in $[0, +\infty)$ ma $F(x) = \int_0^x -e^{-t}\,dt = e^{-x} - 1$ non ammette minimo in $[0, +\infty)$ essendo strettamente decrescente in $[0, +\infty)$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti, dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che $F(x)$ è derivabile in $(0, +\infty)$ con $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. Dal primo criterio di convessità segue allora che $F(x)$ è convessa in $[0, +\infty)$ essendo per ipotesi $F'(x) = f(x)$ crescente in $[0, +\infty)$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È vera. Infatti, essendo $f(x)$ strettamente crescente possono verificarsi tre casi
(i) $f(x) < 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$,
(ii) $f(x) > 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$, oppure
(iii) esiste un unico $x_0 \in [0, +\infty)$ tale che $f(x_0) = 0$ e quindi risulta $f(x) > 0$ per ogni $x \in (x_0, +\infty)$.i

Poiché dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$, dal criterio di monotonia avremo in corrispondenza che
(i) $F(x)$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$,
(ii) $F(x)$ è strettamente decrescente in $[0, +\infty)$, oppure
(iii) $F(x)$ è strettamente crescente in $[x_0, +\infty)$.

In ogni caso, dal Teorema sul limite delle funzioni monotone, possiamo concludere che esiste il limite $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 9 giugno 2016

(1) Fornire la definizione di primitiva di una funzione e di integrale indefinito. Enunciare il teorema e la formula fondamentale del calcolo integrale.

(2) Enunciare e dimostrare il criterio di monotonia per funzioni derivabili.

(3) Provare che un insieme non vuoto e superiormente limitato ammette estremo superiore finito.

(4) Sia $f(x)$ funzione definita e monotona in $[a, b]$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in $[a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $f(x)$ è continua in $[a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $f(x)$ ammette al più discontinuità di prima specie in $[a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 6 luglio 2016

(1) Fornire la definizione di funzione derivabile in un punto e illustrarne l'interpretazione geometrica.

(2) Enunciare e dimostrare il criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno.

(3) Provare che ogni insieme non vuoto e superiormente limitato ammette estremo superiore finito.

(4) Sia $f : [a, b] \to I\!R$ una funzione continua tale che $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. Esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. Se $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$ in $[a, b]$ allora $G(b) = G(a)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 7 settembre 2016

(1) Fornire la definizione di funzione integrabile secondo Riemann, partendo dalla definizione di partizione, somme integrali inferiore e superiore, integrale inferiore e superiore. Fornire un esempio di funzione limitata non integrabile.

(2) Enunciare e dimostrare il teorema di regolarità delle successioni monotone.

(3) Provare che ogni funzione derivabile in un punto risulta continua in tale punto.

(4) Sia $f(x)$ funzione derivabile in $\mathbb{R}$ con $f(0) = f'(0) = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $x_0 = 0$ è punto di massimo o di minimo relativo. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$