Esercizi di Geometria
C.d.L. Ingegneria Meccanica
a.a. 2012/13

Diagonalizzabilità.

1) Stabilire se le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

sono diagonalizzabili per similitudine. In caso affermativo trovare le matrici di trasformazione.

Soluzione A e C non sono diagonalizzabili per similitudine. B è simile alla matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$.

2) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ sul campo $\mathbb{R}$, si consideri il prodotto scalare

$$(x^1, x^2) \cdot (y^1, y^2) = x^1y^1 + x^2y^1 + x^1y^2 + 2x^2y^2$$

a) Determinare la matrice associata al precedente prodotto scalare rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$. Rispetto al prodotto scalare considerato, la base canonica di $\mathbb{R}^2$ è ortogonale? È ortonormale?
b) Determinare il prodotto scalare tra i vettori $a = (1, -1)$ e $b = (-3, 2)$, secondo la precedente definizione.

Soluzione La matrice associata al prodotto scalare è $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Poichè G non è diagonale, la base canonica non è ortogonale, e quindi neanche ortonormale, rispetto al prodotto scalare assegnato. $a \bullet b = -2$.

3) Sia φ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da $\varphi(x, y, x) = (3x, 2y - 3z, y - 2z)$. Si determinino la sua equazione caratteristica ed i suoi autovalori. Stabilire se esiste una forma diagonale per φ e, in caso affermativo, scriverla.

Soluzione Equazione caratteristica: $(3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)=0$. Autovalori: -1, 1, 3. φ ha tre autovalori distinti, quindi ammette una forma diagonale. In particolare $D=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ è la matrice diagonale associata a φ (rispetto a una base spettrale di $\mathbb{R}^3$ relativa a φ), dunque la forma diagonale di φ è $\varphi(x,y,z)=(-x,y,3z)$.

4) Determinare gli autovalori e i relativi autospazi della matrice $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 10 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Dire se A è diagonalizzabile per similitudine ed eventualmente determinare la matrice D diagonale simile a A e la matrice regolare E tale che $E^{-1}AE=D$. Esiste una basa spettrale per $\mathbb{R}^3$ relativa a A?

Soluzione Equazione caratteristica: $-\lambda^2(\lambda-7)=0$. φ ha autovalori 0 (con molteplicità algebrica 2) e 7 (con molteplicità algebrica e geometrica 1).
$V_0=\text{Span}\{(1,-2,0)\}$, $V_7=\text{Span}\{(1,5,0)\}$. Poichè $m_g(0)=dim(V_0)=1<m_a(0)$, A non è diagonalizzabile. Per il teorema spettrale, ciò implica che non esista una base spettrale di $\mathbb{R}^3$ relativa a A.

4) Determinare gli autovalori e i relativi autospazi della matrice $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Dire se B è diagonalizzabile per similitudine ed eventualmente determinare la matrice D diagonale simile a B e la matrice regolare E tale che $E^{-1}BE=D$. Esiste una basa spettrale per $\mathbb{R}^3$ relativa a B?

Soluzione Equazione caratteristica: $(3-\lambda)^2(2-\lambda)=0$. φ ha autovalori 3 (con molteplicità algebrica 2) e 2 (con molteplicità algebrica e geometrica 1).
$V_2=\text{Span}\{(1,0,1)\}$, $V_3=\text{Span}\{(1,0,0),(0,1,1)\}$. Poichè $m_g(3)=dim(V_3)=2=m_a(3)$, B è diagonalizzabile. La matrice diagonale simile a B è $D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ Per il teorema spettrale, la diagonalizzabilità di B equivale all'esistenza di una base spettrale di $\mathbb{R}^3$ relativa a B, ad esempio $B^s=$

$((1,0,1),(1,0,0),(0,1,1))$. Allora la matrice E regolare richiesta è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (verifica: deve essere $BE = ED$).