Esercizi di Geometria

C.d.L. Ingegneria Meccanica

a.a. 2015/16

Spazi vettoriali e lineare dipendenza

1) Determinare le equazioni di $W = \text{Span}\{\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}\}$, dove $\mathbf{u} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$, $\mathbf{v} = (\mathbf{3}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\mathbf{w} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$ e stabilire se $\mathbf{a} = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ e $\mathbf{b} = (\mathbf{7}, \mathbf{4}, -\mathbf{1}, \mathbf{2})$ appartengono a W.

2) Dati i vettori $\mathbf{a} = (\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$, $\mathbf{b} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{1})$, $\mathbf{c} = (-\mathbf{1}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1})$, $\mathbf{d} = (\mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{0})$, stabilire se sono linearmente indipendenti e se $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$ appartengono a $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

3) Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ sono sottospazi vettoriali e in caso affermativo determinarne la dimensione e una base:

- $W_1 = \{(a, a+1, a-b, 0) \ :\ a, b \in \mathbb{R}\}$
- $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + t = 0,\ y = -3z\}$
- $W_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t = xy,\ z = 0\}$
- $W_4 = \{(2a - b, a + b, c, a - c + 2b)\} \ :\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$

4) Stabilire se i seguenti insiemi di matrici sono sottospazi vettoriali e in caso affermativo determinarne la dimensione e una base:

- $W_1 = \{A = \begin{pmatrix} a & a+2b \\ c+b & a-b-2c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2; \mathbb{R})\}$
- $W_2 = \{A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2, 3; \mathbb{R}) :\ a + 3f - c = 0,\ b = 1\}$
- $W_3 = \{A \in \mathcal{M}(3; R) \ :\ A \text{ é diagonale }\}$
- $W_4 = \{A \in \mathcal{M}(3; R) \ : A = \ {}^tA\}$.

5) Determinare la dimensione ed una base per $W = \text{Span}\{\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}\}$, dove $\mathbf{a} = (-\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{0}, \mathbf{4})$, $\mathbf{b} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$, $\mathbf{c} = (-\mathbf{5}, \mathbf{6}, -\mathbf{2}, \mathbf{7})$. Estendere la base individuata ad una base di $\mathbb{R}^4$.

6) Dall'insieme $I = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}\} \subset \mathbb{R}^4$, dove $\bar{a} = (0, 0, 3, 4)$, $\bar{b} = (1, 2, 1, 5)$, $\bar{c} = (0, 8, 0, 1)$, $\bar{d} = (0, 0, 0, 0)$, $\bar{e} = (-1, 6, 1, 0)$, $\bar{f} = (1, 0, 0, 0)$, estrarre un iniseme linearmente dipendente, un insieme linearmente indipendente che non sia una base per $\text{Span}(I)$, un sistema di generatori per $\text{Span}(I)$ che non ne costituisca una base e infine una base per $\text{Span}(I)$.

7) Nello spazio vettoriale $\mathcal{M}(2;\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine 2 su $\mathbb{R}$, si considerino i sottospazi vettoriali

$$W_1 = \{M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2;\mathbb{R}) \ : \ x+2t = 0, \ y+4t = 0\}, \quad W_2 = \text{Span}\{A, B, C\}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & -15 \end{pmatrix}.$$

Determinare basi, dimensioni ed equazioni di W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

8) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{deg\leq 3} = \{a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ : \ a_i \in \mathbb{R}\}$ si considerino $a(x) = 3x - 4$, $b(x) = 2x^3 - x^2 + 2$, $c(x) = x^2 - 3x$ e $d(x) = x^3 - 1$. Determinare la dimensione e una base B di $W = \text{Span}\{a(x), b(x), c(x), d(x)\}$. Estendere B ad una base H di $\mathbb{R}[x]_{deg\leq 3} = \{a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ : \ a_i \in \mathbb{R}\}$.

9) Determinare se sono linearmente dipendenti i seguenti insiemi di vettori:
- $A = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (0, 0, 1)\}$
- $B = \{1 - 4x^2, 2x + 1, 2 - 4x\}$
- $C = \{I_2, \ M, \ N\}$, dove $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

10) Sia $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{t}\}$ una base di uno spazio vettoriale V su un campo K. Si dimostri che $B' = \{4\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w} + \mathbf{t}, \mathbf{2v} - \mathbf{w}, \ \mathbf{4t}\}$ é una base di V e che $B'' = \{3\mathbf{u} - \mathbf{2v}, -\mathbf{2w} + \mathbf{5u}, \mathbf{4u} - \mathbf{v} - \mathbf{w}, \ \mathbf{2t}\}$ non é una base di V.

11) Provare che i sottoinsiemi

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y - z - t = 0\}$$
$$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y - z + t = 0\}$$

sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$. Determinare basi e dimensioni di W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

12) Determinare le equazioni di $W_1 = \text{Span}\{(3, 7, -1), (8, 0, 2), (1, 1, 3)\}$ e $W_2 = \{(3, 7, -1), (8, 0, 2), (5, -7, 3)\}$. Stabilire se $\mathbf{u} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ appartiene a W_1 e a W_2.

13) Si considerino i sottospazi vettoriali di R^4 $W_1 = \text{Span}\{(1, 3, -2, 4)\}$ e $W_2 = \{(x, y, z, t) \ : \ y + z - x = 0, \ t = 4x\}$. Trovare la dimensione, una base e le equazioni per W_1, W_2, $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$. In questo caso il sottospazio somma si puó definire *somma diretta*?

Soluzioni

1) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ t = 0\}$; $\mathbf{a} \in \mathbf{W}$; $\mathbf{b} \notin \mathbf{W}$.

2) Vettori linearmente dipendenti (sono 4 vettori in $\mathbb{R}^3$, quindi non serve alcun calcolo). Span$\{\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}\}$ = Span$\{\mathbf{a},\ \mathbf{b}\}$ poiché $\mathbf{c}$, $\mathbf{d} \in$ Span$\{\mathbf{a},\ \mathbf{b}\}$.

3) W_2 e W_4 sono sottospazi vettoriali. La loro dimensioni sono $dim(W_2) = 2$ e $dim(W_4) = 3$. Una base per W_2 é $B_2 = \{(1, 0, 0, -2), (0, 1, -1/3, 0)\}$, una base per W_4 é $B_4 = \{(2, 1, 0, 1), (-1, 1, 0, 2), (0, 0, 1, -1)\}$. W_1 non é sottospazio vettoriale, perché non contiene il vettore nullo; W_3 non é sottospazio vettoriale, perché non é chiuso rispetto alla combinazione lineare.

4) W_1 é un sottospazio vettoriale di dimensione 3. Una base per W_1 é $B_1 = \{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}\}$.
W_2 non é sottospazio vettoriale, perché non contiene la matrice nulla.
W_3 é un sottospazio vettoriale di dimensione 3. Una base per W_3 é
$B_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\}$.
W_4 é un sottospazio vettoriale di dimensione 6. Una base per W_4 é $B_4 =$
$\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\}$.

5) $\mathbf{c} = \mathbf{2a} - \mathbf{b}$, dunque $W =$ Span$\{\mathbf{a},\ \mathbf{b}\}$ e $dim(W) = 2$.
$W = \{(x, y, z, t) \ : \ x = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z,\ t = \frac{4}{3}y + \frac{1}{2}z\}$. Una base di W é $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ e la si puó estendere alla base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})\}$ di $\mathbb{R}^4$.

6) Un insieme linearmente dipendente é, ad esempio, I stesso; un insieme linearmente indipendente é, ad esempio $L = \{\bar{a},\ \bar{b}\}$, o anche ogni insieme formato da un solo vettore, purché diverso dal vettore nullo $\bar{d}$. Un sistema di generatori per Span(I) che non ne costituisca una base é, ad esempio, $\{\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c},\ \bar{e},\ \bar{f}\}$, mentre una base per Span(I)é, ad esempio, $\{\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c},\ \bar{f}\}$.

7) $W_1 = \{M = \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2; \mathbb{R}) \ : \ x + 2t = 0,\ y + 4t = 0\} =$
$\{\begin{pmatrix}-2t & -4t\\ z & t\end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2; \mathbb{R}) \ : \ z, t \in \mathbb{R}\}$.
$dim(W_1) = 2$ e una base per W_1 é $B_1 = \{\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\}$.

$W_2 = \text{Span}\{A, B\} = \{M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2;\mathbb{R}) \ : \ x = 8z-2t, \ y = 13z-4t\}$.
$dim(W_2) = 2$ e una base per W_2 é $B_2 = \{A, B\}$.
$W_1 + W_2 = \text{Span}\{A, B, D = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\} = \text{Span}\{A, B, E\}$.
$dim(W_1+W_2) = 3$, dunque, per la formula di Grassman, $dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Le equazioni di $W_1 + W_2$ si ottengono determinando $\text{Span}\{A, B, E\}$, mentre le equazioni di $W_1 \cap W_2$ sono l'unione delle equazioni di W_1 e di quelle di W_2, cioé: $x + 2t = 0, \ y + 4t = 0, \ x = 8z - 2t, \ y = 13z - 4t$, riducibili a $x = -2t, \ y = -4t, \ z = 0$.

8) Suggerimento e soluzione Lo spazio $R[x]_{deg\leq 3}$ é isomorfo a R^4, cioé ad ogni polinomio $a(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ si puó far corrispondere secondo un'applicazione biunivoca la quaterna (a_0, a_1, a_2, a_3), dunque l'esercizio puó essere risolto in R^4. $a(x), \ b(x), \ c(x), \ d(x)$ sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono le quaterne $a = (-4, 3, 0, 0), \ b = (2, 0, -1, 2), \ c = (0, -3, 1, 0), \ d = (-1, 0, 0, 1)$. Si ottiene $dim(W) = 3$; una base di W é, ad esempio $\mathcal{B} = \{a(x), b(x), c(x)\}$. Le equazioni di W si ottengono determinando $\text{Span}\{a, b, c\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x = (-4/3)y-4z-t\}$ e deducendo $W = \{a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ : \ a_0 = (-4/3)a_1 - 4a_3 - a_4\}$.

9) B e C sono linearmente indipendenti, mentre A é linearmente dipendente.

11) $dim(W_1)$=3 e una base per W_1 é $B_1 = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1)\}$.
$dim(W_2)$=3 e una base per W_2 é $B_2 = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$.
$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y - z - t = 0, \ x - y - z + t = 0\}$, ovvero $W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x = z, \ y = t\}$. $dim(W_1 \cap W_2) = 2$ e una base per $W_1 \cap W_2$ é $B = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$. Per la formula di Grassman $dim(W_1 + W_2) = 4$, cioé $W_1 + W_2 \equiv \mathbb{R}^4$. Una base per $W_1 + W_2$ é la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

12) I vettori di W_1 sono linearmente indipendenti, quindi $W_1 \equiv \mathbb{R}^3$. Il terzo vettore di W_2 é la differenza fra il secondo ed il primo, dunque $W_2 = \text{Span}\{(3, 7, -1), (8, 0, 2)\} = \{(x, y, z) \ : \ y + 4z = x\}$. Il vettore $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ appartiene sia a W_1 che a W_2.

13) $W_1 = \{(x, y, z, t) \ : \ y = 3x, \ z = -2x, \ t = 4x\}$, $dim(W_1) = 1$ e una base per W_1 é $B_1 = \{(1, 3, -2, 4)\}$. $dim(W_2) = 2$ e e una base per W_2 é $B_2 = \{(1, 0, 1, 4), (0, 1, -1, 0)\}$. $W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z, t) \ : y = 3x, \ z = -2x, \ y + z - x = 0, \ t = 4x\} = W_1$. Dunque $dim(W_1 \cap W_2) = 1$, $dim(W_1 + W_2) = 2$ e $W_1 + W_2 \equiv W_2$. Lo spazio somma non é una somma diretta, perché $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.