Esercizi di Geometria
C.d.L. Ingegneria Meccanica
a.a. 2012/13

Calcolo matriciale e sistemi lineari
Soluzioni

$$1) AD = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ -22 & 13 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}, BE = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 1 & -12 & -7 \end{pmatrix}, CA = (-10 \ 1 \ 7), CD = (18 \ 17),$$
$$DB = \begin{pmatrix} 20 & -9 \\ -22 & -9 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, EA = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 19 & 7 \end{pmatrix}, ED = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -15 & 8 \end{pmatrix}.$$

2) Si ottiene una matrice quadrata di ordine 2 con determinante -132.

3) Calcolare il determinante delle seguenti matrici e stabilirne l'invertibilità. $\det(A) = 0$, $\det(B) = 12$, $\det(C) = -65$, $\det(D) = -81$, $\det(E) = 0$ (l'ultima colonna é la somma delle precedenti), $\det(F) = 0$ (una riga é nulla), $\det(G) = 0$ (le prime due righe sono proporzionali). le sole matrici invertibili sono quindi B , C e D .

$$B^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, C^{-1} = \frac{1}{65} \begin{pmatrix} 7 & 31 & 2 \\ 14 & -3 & 4 \\ -8 & 11 & 7 \end{pmatrix}, D^{-1} = \dots$$

4) $\nu(A) = 2$, $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ e $\{(1, 1), (0, 1)\}$ sono insiemi di vettori linearmente indipendenti.

$\nu(B) = 1$. Ogni vettore riga e ogni vettore colonna forma un insieme linearmente indipendente.

$\nu(C) = 3$. $\{(1, -4, 4, 0, 1, 3), (-1, 4, -3, -1, 0, -2), (0, 0, 1, -1, 1, 1)\}$ e $\{(1, -1, 0, 3), (-4, 4, 0, 0), (4, -3, 1, -1)\}$ sono insiemi di vettori linearmente indipendenti.

5) una matrice diagonale (e quindi sia triangolare superiore che inferiore)

avente lo stesso determinante di A é $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7) $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -16 \\ -\frac{15}{2} & 7 \end{pmatrix}$.

8) Le matrici richieste sono del tipo $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ g & g & i \end{pmatrix}$, $a, b, c, g, i \in \mathbb{R}$.

$$W = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ g & g & i \end{pmatrix} : a, b, c, g, i \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dunque W é uno spazio vettoriale di dimensione ..., e una base per esso é ...

9) I) $x = 1, y = -1, z = 2, t = 2$

II) $\{(x, y, z, t) : x = -2y - 2t + 5, z = -2t + 3\} = \{(-2y - 2t + 5, y, -2t + 3, t) : y, z \in \mathbb{R}\}$

III) $x = 1, y = 0, z = 1, t = 0$

10) Per $\lambda \neq 1$ esiste la matrice inversa $A^{-1}(\lambda)$ e si ha

$$A^{-1}(\lambda) = \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & -\lambda \\ -\lambda & 1 - 2\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

11) Per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$ ci sono esattamente 3 vettori linearmente indipendenti.

$$12) \dim(U_k) = \begin{cases} 3 & k = 1 \\ 4 & k \neq 1 \end{cases}$$

Per $k = 1$ un insieme linearmente indipendente é formato dai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

Per $k \neq 1, 2, 0$ un insieme linearmente indipendente é formato dai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$. Per $k = 0$ o $k = 2$ un insieme linearmente indipendente é formato dai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_5$. $\mathbf{u}$ appartiene a U_k per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$.

13) I) Per $a \neq 0, -1, 1$ si ha $\nu(A) = 3$ e $\nu(\bar{A}) = 4$ dunque il sistema é impossibile. Per $a = 0$ si ha $\nu(A) = \nu(\bar{A}) = 3$, dunque il sistema é di Cramer. Per $a = 1$ o $a = -1$ si ha $\nu(A) = 2$ e $\nu(\bar{A}) = 3$ dunque il sistema é impossibile.