Esercizi di Geometria
C.d.L. Ingegneria Meccanica
a.a. 2012/13

Calcolo matriciale e sistemi lineari

1) Calcolare tutti i prodotti riga per colonna eseguibili fra le seguenti matrici: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Date le matrici del punto precedente, determinare $3B - {}^tD^tE + B^2$. Che tipo di matrice si ottiene? Se ne puó calcolare il determinante?

3) Calcolare il determinante delle seguenti matrici e stabilirne l'invertibilitá.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 10 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare l'inversa delle matrici che risultano invertibili.

4) Stabilire il rango delle seguenti matrici e dedurne la lineare dipendenza/indipendenza dei vettori colonna.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Determinare il rango delle seguenti matrici, al variare del parametro α in $\mathbb{R}$.

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2\alpha \end{pmatrix}, \ B(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6) Determinare una matrice triangolare superiore ed una matrice triangolare inferiore che abbiano lo stesso determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7) Determinare la matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

8) Determinare tutte le matrici $A \in \mathcal{M}(3; \mathbb{R})$ tali che $AB = BA$, dove

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Provare che l'insieme di queste matrici costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(3; \mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.

9) Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$I) \begin{cases} x + 2y - 2z + 3t = 1 \\ x + 3y - 2z + 3t = 0 \\ 2x + 4y - 3z + 6t = 4 \\ x + y - z + 4t = 6 \end{cases}$$

$$II) \begin{cases} z + 2t = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 4 \\ 2x + 4y - z + 2t = 7 \end{cases}$$

$$III) \begin{cases} 3x + 4y - z - 3t = 2 \\ x + y - z - 2t = 0 \\ x - y + z + 4t = 2 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

10) Stabilire per quali valori del parametro reale λ esiste la matrice inversa $A^{-1}(\lambda)$ della matrice

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e determinarne gli elementi.

11) Determinare quanti e quali fra i vettori $\mathbf{a} = (k+3, -1, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (5, k-3, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (6, -6, k+4, 0)$ e $\mathbf{d} = (k+4, -4-k, k+4, 2)$ sono linearmente indipendenti, al variare del parametro reale k.

12) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sul campo $\mathbb{R}$ si consideri il sottospazio vettoriale

$$U_k = \mathrm{Span}\{\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3},\ \mathbf{u_4},\ \mathbf{u_5}\}$$

dove $\mathbf{u_1} = (1, 0, 0, k)$, $\mathbf{u_2} = (0, -1, -1, k)$, $\mathbf{u_3} = (k, 1, 0, 1)$, $\mathbf{u_4} = (1, 1+k, 0, 1)$, $\mathbf{u_5} = (1, 0, 1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$.
a) Calcolare la dimensione di U_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
b) Dato il vettore $\mathbf{u} = (1, k, k-1, 1)$, stabilire per quali valori di k il vettore u appartiene a U_k.

13) Discutere e, nei casi possibili, risolvere i seguenti sistemi lineari, al variare del parametro reale a:

$$\begin{cases} ax + y - z = a \\ x + az = 1 \\ 2x + ay = 2 \\ y - 2z = a \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + y + z + t = a \\ 2x + ay + 3z - at = 0 \\ 3x + 2y + 4z = a \\ ay - z + 3t = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y + z = a - 1 \\ ax + 3y + 3(a-2)z = a \\ (a-2)x + (a-2)y + z = -1 \end{cases}$$