Esercizi di Geometria
C.d.L. Ingegneria Meccanica
a.a. 2012/13

Geometria del piano e dello spazio

1) Siano $P_1 \equiv (3,2)$, $P_2 \equiv (1,1)$ e $P_3 \equiv (5,-1)$ tre vertici consecutivi di un parallelogramma del piano euclideo E_2. Trovare:
a) le equazioni dei lati del parallelogramma;
b) il quarto vertice P_4;
c) le equazioni delle diagonali e il loro punto di intersezione.

Soluzione. (a)$P_1P_2 : x - 2y + 1 = 0$; $P_2P_3 : x + 2y - 3 = 0$; $P_1P_4 : x + 2y - 7 = 0$; $P_3P_4 : x - 2y - 7 = 0$. (b) $P_4 \equiv (7,0)$. (c) $3x + 2y - 13 = 0$; $x + 6y - 7 = 0$; (4,1/2).

2) Data la retta r di equazione $x + 2y + 3 = 0$, trovare
a) la retta s perpendicolare a r e passante per $P \equiv (0,1)$;
b) la retta t parallela a r e passante per $Q \equiv (1,0)$;
c) il punto B appartenente a r tale che l'area del triangolo ABC sia 28, con $A \equiv (-3,0)$ e $C = s \cap t$.

Soluzione. (a) $2x - y + 1 = 0$. (b) $x + 2y - 1 = 0$. (c) $B_1 \equiv (-31,14)$, $B_2 \equiv (25,-14)$.

3) Nel piano euclideo E_2 si considerino le rette

$$r)\, x + 3y + 1 = 0, \qquad r')\, 3x + 4y - 2 = 0.$$

Detto P il punto di intersezione tra r e s, determinare:
a) le equazioni delle rette parallele agli assi coordinati passanti per P;
b) l'equazione della retta passante per P e parallela alla retta $t)\, 3x - y + 3 = 0$;
c) l'equazione della retta passante per P e perpendicolare alla retta $p)\, 4x - 3y + 1 = 0$;
d) le equazioni delle rette passanti per P aventi distanza 1 dall'origine O del riferimento.

Soluzione. (a) $y + 1 = 0$; $x - 2 = 0$. (b) $3x - y - 7 = 0$. (c) $3x + 4y - 2 = 0$. (d) $y + 1 = 0$; $4x + 3y - 5 = 0$.

4) Nello spazio euclideo E_3 si considerino le due rette

$$r \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \qquad s \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ y - 2z = 2. \end{cases}$$

a) Stabilire la posizione di r e s.
b) Calcolare la distanza tra r e s.
c) Scrivere le equazioni della retta t passante per $P \equiv (1, 0, 0)$ e ortogonale a r e a s.
d) Scrivere l'equazione del piano passante per P e ortogonale a t.

Soluzione. (a) rette sghembe. (b) $d = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. (c) $t) \begin{cases} 2x - z - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. (d) $\pi) x + 2z - 1 = 0$.

5) Nello spazio euclideo E_3, si considerino i piani

$$\pi_1)\ x + y - z = 0 \qquad \pi_2)\ x - y - 2z = -1$$

a) Si determini il piano π_3, parallelo al piano $\alpha) \, 4x - 6z - 3 = 0$ ed appartenente al fascio $\mathcal{F}$ individuato da π_1 e π_2.
b) Si calcoli la distanza dall'origine del riferimento dalla retta r, asse del fascio $\mathcal{F}$.
c) Si determini il punto equidistante dai piani π_1 e π_2 ed appartenente al semiasse positivo delle ascisse.

Soluzione. (a) $2x - 3z + 1 = 0$. (b) $\sqrt{21/98}$. (c) $P \equiv (\frac{1}{\sqrt{2}-1}, 0, 0)$.

6) Nello spazio euclideo E_3 si considerino i punti $A \equiv (1, 0, 0)$ e $B \equiv (1, 0, -1)$ e la retta $r) \, x + 2 = y = z - 1$.
a) Scrivere l'equazione del piano α passante per A e per B e parallelo ad r.
b) Scrivere l'equazione del piano β contenente r e parallelo ai $\pi_1) \, x+y+3 = 0$.

Soluzione. (a) $x - y = 1$. (b) $3x - 2y - z + 7 = 0$.

7) È data, nello spazio euclideo E_3, la retta s passante per il punto $A \equiv (-1, 3, 0)$ ed avente coefficienti direttori $(1, 2, 2)$.
a) Stabilire, al variare del parametro reale λ, la mutua posizione tra s e la retta

$$r_\lambda : \begin{cases} \lambda x - 2y + (\lambda - 1)z + 7 = 0 \\ 2x - y + (\lambda - 2)z - 2 = 0 \end{cases}$$

b) Determinare, se esistono, i valori del parametro λ tali che s ed r_λ siano tra loro ortogonali.
c) Trovare le equazioni dei due piani π_1 e π_2, ortogonali ad s ed aventi distanza $d = 2$ dal punto A. **d)** Determinare, nei casi in cui esiste, il piano contenente le rette r e s.

Soluzione. (a) rette sghembe $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2, 23/2\}$, parallele e distinte per $\lambda = 2$, incidenti per $\lambda = 23/2$. (b) 7/2, -1. (c) $x + 2y + 2z + 1 = 0$; $x + 2y + 2z - 11 = 0$. (d)

8) Nello spazio euclideo reale 3-dimensionale E_3 si considerino i punti $P \equiv (0, 0, 1)$, $Q \equiv (0, 1, 0)$ e le rette

$$r) \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad s) \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = -s \\ z = 1 - 2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

a) Calcolare la distanza fra r e s.
b) Sia c la retta contenente i punti P e Q; determinare la retta incidente le rette r e s e parallela a c.

Soluzione. (a) rette sghembe. $d = \frac{4}{\sqrt{122}}$. (b) $r) \begin{cases} 5x + 1 = 0 \\ 5y + 5z + 1 = 0 \end{cases}$

9) Nello spazio euclideo E_3 si considerino le rette $r(\alpha)$ e $s(\alpha)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$r(\alpha) \begin{cases} (3 - \alpha)x - 3y + 5z = 3 - \alpha \\ x + y + 3z = 1 \end{cases} \qquad s(\alpha) \begin{cases} 3y + 2z = \alpha \\ (1 - \alpha)x - 2y + (1 + \alpha)z = 1 - \alpha \end{cases}$$

a) Studiare la posizione delle due rette al variare di α.

b) Nei casi in cui $r(\alpha)$ e $s(\alpha)$ sono distinte e complanari, scrivere l'equazione del piano che le contiene.

Soluzione. (a) rette sghembe $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 13\}$, coincidenti per $\alpha = 0$, incidenti per $\alpha = 13$. (b) $6x + y - 7z - 6 = 0$.

10) Studiare, al variare del parametro reale λ la mutua posizione della retta

$$r(\lambda) \begin{cases} 3(\lambda - 2)x + 3y + \lambda z = \lambda \\ x + 2y + 2z = \lambda - 1 \end{cases}$$

e del piano $\pi(\lambda)$ di equazione $x + (\lambda - 2)y + (\lambda - 2)z = 1$ dello spazio euclideo E^3.
Posto $\lambda = 4$, determinare
a) il piano contenente r e ortogonale a π;
b) il piano contenente r e parallelo a π.

Soluzione. La retta e il piano sono incidenti in un punto $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$, la retta è contenuta nel piano per $\lambda = 3$, la retta e il piano sono paralleli e disgiunti per $\lambda = 4$. (a) $34x - 13y - 4z + 24 = 0$. (b) $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

11) Nello spazio euclideo E_3 si considerino il punto $P \equiv (1, 0, 1)$, la retta r di equazioni $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$ e il piano $\pi)\, 2x + y - z + 2 = 0$.
a) Trovare il piano α contenente P, parallelo alla retta r e perpendicolare a π.
b) Trovare la retta s contenente P, parallela a π e incidente la retta r.
c) Verificare che le rette s e $t = \pi \cap \alpha$ sono sghembe e determinare la retta perpendicolare comune a s e a t.

Soluzione. a) $\alpha) y + z - 1 = 0$. (b) $\begin{cases} x + z = 2 \\ y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 4x - y + 7z - 11 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

12) Nello spazio euclideo E_3 si consideri la retta $r)\, x = y = z$. Determinare:
a) il piano α contenente r e parallelo al piano di equazione $2x - 3y + z = 8$;
b) il piano β contenente r e parallelo alla retta di equazioni

$$\begin{cases} x = y + 2z \\ y - 2z = 3; \end{cases}$$

Soluzione. (a) $\alpha)\, 2x - 3y + z = 0$. (b) $\beta)\, x - 3y + 2z = 0$.

13) Nello spazio euclideo E_3 si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 2z \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y = z + 2 \\ x - y = z \end{cases}$$

e il piano $\alpha :\ x - y + 2z = 1$.
a) Stabilire la posizione di r e s.
b) Trovare la retta incidente r e s e ortogonale a α.
c) Trovare il piano contenente il punto $P \equiv (1, 1, 1)$, ortogonale a α e parallelo a r.

Soluzione. (a) rette sghembe. (b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$ (c) $x + y - 2 = 0$.

14) Nello spazio euclideo E_3 si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - z = 2 \\ y - 2z = 5 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 3x - y - z = 2 \\ 5x - 2y - z = 1 \end{cases}$$

e il piano $\alpha : x - y + 2z = 1$.
a) Stabilire la posizione reciproca di r e s.
b) Trovare, se esiste, il piano che le contiene entrambe.
c) Determinare la distanza fra r e s.

Soluzione. (a) rette parallele e distinte. (b) $2x - y + 1 = 0$. (c) $d = \sqrt{(30)}/6$

15) Nello spazio euclideo E_3 si determini la distanza del punto $P = (0, 1, 2)$ dalla retta

$$r : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \quad .$$

Soluzione. $d = \sqrt{1166}/11$

16) Nello spazio euclideo E_3 si determini la posizione reciproca e la distanza fra le rette

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

e

$$s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 1 \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Soluzione. $d(r, s) = \sqrt{2/7}$.

17) Nel piano euclideo E_2 si classifichino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coniche $\mathcal{C}_\infty$: $2xy - x - 3y = k$, $\mathcal{C}_\in : 2kx^+ 2(k2)xy4y^2 + 2x = 1$ e $\mathcal{C}_\ni : x^2 + (k2)xy + y^2 4 = 0$.

Soluzione. $\mathcal{C}_\infty$ conica degenere per $k = -3/2$ e iperbole per $k \neq -3/2$. $\mathcal{C}_\in$ parabola per $k = -2$ e iperbole per $k \neq -2$. $\mathcal{C}_\ni$ ellisse per $0 < k < 4$, iperbole per $k < 0 V k > 4$, conica degenere per $k = 0 V k = 4$.