Esercizi di Geometria
C.d.L. Ingegneria Meccanica
a.a. 2012/13

Applicazioni lineari

1) Si determini quali fra le seguenti applicazioni sono lineari $\varphi_1(x,y,z,t) = (3x-2y-z, 3t)$, $\varphi_2(x,y,z,t) = (3x-2y-z, 3)$, $\varphi_3(x,y) = (xy+3x, x-2y, 3y)$, $\varphi_4(x,y,z) = (-x-z, 2y, x)$, $\varphi_5(x,y,z) = (x-2y+3z, 2z+y, 0, 3x)$.

Soluzione Sono lineari φ_1, φ_4 e φ_5.

2) Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da $\varphi(x,y,z) = (3x-2y+z, x, x-y)$. 1) Verificare che φ é lineare.
2) Determinarne nucleo e immagine, la loro dimensione ed una base per ciascuno di essi.
3) Determinare la matrice A associata a φ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ nello spazio di partenza e nello spazio d'arrivo.
4) Determinare la matrice B associata a φ rispetto alla base canonica nello spazio di partenza e alla base $\mathcal{B}' = ((1,2,1),(0,3,0),(1,0,0))$ nello spazio d'arrivo.
5) Determinare la matrice C associata a φ rispetto a $\mathcal{B} = ((1,0,-1),(0,3,0),(1,1,0))$, base dello spazio di partenza e alla base canonica nello spazio d'arrivo.
6) Determinare la matrice D associata a φ rispetto alla base $\mathcal{B}$ nello spazio di partenza e alla base $\mathcal{B}'$ nello spazio d'arrivo.

Soluzione: 2) $Ker(\varphi) = \{\bar{0}\}$, dunque φ é ..., e poiché φ é un endomorfismo, essa é anche.... Di conseguenza $Im(\varphi) = \dots$.
3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,
$D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1/3 & 2 & 1/3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Data l'applicazione $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\varphi(x,y,z) = (x+y, x+z)$:
1) determinarne la dimensione ed una base per nucleo e immagine
2) dedurre dal punto precedente se φ é iniettiva e/o suriettiva
3) determinare la matrice A associata a φ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$
4) dire se $(4,3) \in Im(\varphi)$ ed eventualmente determinare $\varphi^{-1}(4,3)$.

Soluzione: 1), 2) $Ker(\varphi) = \text{Span}((1,-1,-1))$, dunque φ é .... Per la formula della dimensione, si ha $dim(Im(\varphi)) = \dots$ e dunque é ...Una base per $dim(Im(\varphi)$ é...
3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4) $\varphi^{-1}((4,3)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = 4 - x, z = 3 - x\}$.

4) Data l'applicazione $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\varphi(x,y) = (x/2 - y, y, (5/2)x - 2y) :$$

1) determinarne la dimensione ed una base per nucleo e immagine
2) φ puó essere biunivoca?
3) dedurre dal punto 1) se φ é iniettiva e/o suriettiva
4) determinare la matrice A associata a φ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$
5) determinare la matrice B associata a φ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ e alla base $\mathcal{B}' = ((1,0,-1),(0,3,0),(1,1,0))$ di $\mathbb{R}^3$.
6) determinare la matrice C associata a φ rispetto alla base$\mathcal{B} = ((1,1),(0,-1))$ di $\mathbb{R}^2$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$
7) determinare la matrice D associata a φ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ e alla base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$.
8) dire se i vettori $(1,0,5)$ e $(2,-1,10)$ appartengono a $Im(\varphi)$ ed eventualmente determinarne le controimmagini.

5) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, determinare l'applicazione lineare avente A come matrice associata
a) rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$
b) rispetto alla base $\mathcal{B} = ((-1,0),(0,2))$ di $\mathbb{R}^2$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$
c) rispetto alle base canonica di $\mathbb{R}^2$ e alla base $\mathcal{B}' = ((0,1,0),(-1,1,0),(0,0,1))$ di $\mathbb{R}^3$
d) rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ e alla base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$

Soluzione: a) $\varphi(x,y,z) = (-2x - y, -y + 2z)$, b) $\varphi(x,y,z) = (x - y, -2y + 4z)$, c) $\varphi(x,y,z) = (-2x - y, x + 2z)$, d) $\varphi(x,y,z) = (2x + y, 2x + 4z)$.