Appunti di Calcolo Combinatorio

Agnese Ilaria TELLONI

I. RAGGRUPPAMENTI DI OGGETTI

Il Calcolo Combinatorio ha come scopo quello di enumerare, senza crearli esplicitamente, i raggruppamenti di oggetti che si possono formare attingendo da un dato insieme secondo una precisata regola. Distingueremo i raggruppamenti in *sequenze*, cioè gruppi di elementi ordinati, e *insiemi*, cioè gruppi di elementi non ordinati e in raggruppamenti *semplici* e *con ripetizione*, a seconda che sia o meno consentita la ripetizione di un oggetto all'interno di un raggruppamento.

1. Disposizioni semplici di n oggetti in classe k

Si dicono **disposizioni semplici di n oggetti in classe k**, con $n, k \in \mathbb{N}$ e $n \geq k$, tutte le sequenze di k oggetti distinti scelti fra n.

Il numero di disposizioni semplici di n oggetti in classe k è

$$D_{n,k} = n(n-1)....(n-k+1) \tag{1}$$

Esempio Quanti numeri di 3 cifre distinte si possono formare?

L'insieme da cui attingere per formare i raggruppamenti è $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, dunque $n = |I| = 10$; ciascun raggruppamento è formato da 3 oggetti. Il numero richiesto è dunque $D_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

2. Disposizioni con ripetizione di n oggetti in classe k

Si dicono **disposizioni con ripetizione di n oggetti in classe k**, con $n, k \in \mathbb{N}$, tutte le sequenze di k oggetti (non necessariamente distinti) scelti fra n.

Il numero di disposizioni con ripetizione di n oggetti in classe k è

$$D'_{n,k} = n^k \tag{2}$$

Esempio Quanti numeri di 4 cifre pari si possono formare?

L'insieme da cui attingere per formare i raggruppamenti è $I = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, dunque $n = |I| = 5$; ciascun raggruppamento formato da 4 oggetti. Il numero richiesto è dunque $D'_{5,4} = 5^4 = 625$.

3. Permutazioni semplici di n oggetti

Si dicono **permutazioni semplici di n oggetti**, con $n \in \mathbb{N}$, le disposizioni semplici di n oggetti in classe n, cioè tutte le sequenze che si possono formare prendendo ogni volta tutti gli n oggetti distinti di un insieme.

Il numero di permutazioni semplici di n oggetti è, secondo la (1), $P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot 2 \cdot 1$. Tale numero si indica anche con $n!$ ("n fattoriale"). Si ha dunque

$$P_n = n! \tag{3}$$

Esempio Quanti sono gli anagrammi della parola "AMORE"?

L'insieme da cui attingere per formare i raggruppamenti è $I = \{A, M, O, R, E\}$, dunque $n = |I| = 5$; ciascun raggruppamento formato da 5 oggetti. Il numero richiesto è dunque $D_{5,5} = P_5 = 5! = 120$.

4. Permutazioni con ripetizione di n oggetti

Si dicono **permutazioni con ripetizione di n oggetti**, con $n \in \mathbb{N}$, tutte le sequenze che si possono formare prendendo ogni volta tutti gli di n oggetti di un insieme in cui h_1 oggetti sono uguali fra loro, h_2 oggetti sono uguali fra loro, ..., h_r oggetti sono uguali fra loro e $h_1 + h_2 + \cdots + h_r = n$.

Il numero di permutazioni con ripetizione di n oggetti è

$$P_n^{(h_1,\ldots,h_r)} = \frac{n!}{h_1! \ldots h_r!} \tag{4}$$

Esempio Quanti sono gli anagrammi della parola "MATEMATICA"?

L'insieme da cui attingere per formare i raggruppamenti contiene n=10 lettere, di cui 3 sono M, 3 sono A, 2 sono T, una è E e una è C. Il numero richiesto è dunque $P_{10}^{3,3,2,1,1} = \dfrac{10!}{3!3!2!1!1!1!} = 50400$.

5. Combinazioni semplici di n oggetti in classe k

Si dicono **combinazioni semplici di n oggetti in classe k**, con $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, tutti gli insiemi di k oggetti distinti, scelti fra gli n.

Il numero di combinazioni semplici di n oggetti in classe k è $C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Tale quantità si indica anche con $\binom{n}{k}$ e si dice *coefficiente binomiale.* Si ha dunque

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{5}$$

Esempio Quante sono le possibili quaterne al gioco del lotto?

L'insieme da cui attingere per formare i raggruppamenti è formato dai numeri da 1 a 90 (n=90); ciascun raggruppamento contiene $k = 4$ oggetti distinti. Il numero richiesto è dunque $C_{90,4} = \dfrac{90!}{4!86!} = 2555190$.

6. Combinazioni con ripetizionei di n oggetti in classe k

Si dicono **combinazioni con ripetizione di n oggetti in classe k**, con $n, k \in \mathbb{N}$, tutti gli insiemi di k oggetti, non necessariamente distinti, scelti fra gli n.

Il numero di combinazioni con ripetizione di n oggetti in classe k è

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} \tag{6}$$

Esempio Quanti sono i possibili insiemi di esiti di 5 lanci di moneta?

L'insieme da cui attingere per formare i raggruppamenti è $I = \{testa, croce\}$ dunque $n = |I| = 2$; ciascun raggruppamento è formato da 5 oggetti. Il numero richiesto è dunque $C'_{2,5} = \binom{6}{2} = 15$.

II. COEFFICIENTI BINOMIALI E FATTORIALE

Il fattoriale è una funzione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$, definita da

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ n! = n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1 \qquad n \geq 2 \end{cases}$$

Dalla definizione fornita discende la proprietà ricorsiva del fattoriale:

$$n! = n \cdot (n-1)! \tag{7}$$

Dati $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$, si dice *coefficiente binomiale* "n su k" la quantità

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{8}$$

Proprietà

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$
3. $\binom{n}{0} = 1$
4. $\binom{n}{1} = n$

I coefficienti binomiali permettono di esprimere la potenza n-sima di un qualsiasi binomio, secondo la seguente formula (*binomio di Newton*):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{9}$$

Esempio 1. Dimostrare l'identità 2.
$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(n-k)}{(k+1)(k!)(n-k)[(n-k-1)!]} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$.

Esempio 2. Calcolare $(3x-y)^5$.
Secondo la (9),

$$\begin{aligned}(3x-y)^5 &= \binom{5}{0}(3x)^5 + \binom{5}{1}(3x)^4(-y) + \binom{5}{2}(3x)^3(-y)^2 \\ &+ \binom{5}{3}(3x)^2(-y)^3 + \binom{5}{4}(3x)(-y)^4 + \binom{5}{5}(-y)^5 \\ &= 243x^5 - 405x^4y + 270x^3y^2 - 90x^2y^3 + 15xy^4 - y^5.\end{aligned}$$

Esercizi proposti.

1. In una corsa a cui partecipano 15 atleti, determinare quante sono le possibili composizioni del podio e quante sono le possibili terne di atleti che vincono una medaglia.

2. In quanti modi si possono scegliere 7 libri da una libreria di 20?

3. Quante colonne occorre giocare al totocalcio per essere sicuri di fare 13?

4. Quante colonne ha un sistema per il totocalcio con 4 triple?

5. In quanti modi diversi si possono assegnare le magliette numerate da 1 a 5 ai 5 titolari di una squadra di calcetto?

6. Se una partita di calcio finisce 4 a 3, in quanti modi diversi possono essersi succedute le reti delle due squadre?

7. In quanti modi si possono estrarre 5 carte da un mazzo di 40?

8. Quanti sono i possibili insiemi di 6 numeri estraibili al Superenalotto?

9. In quanti modi si possono distribuire 8 tavolette di cioccolato a 5 bambini?

10*. Dimostare l'identità $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, con $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k > 0$. (Maturità 2001)

11*. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90. (Maturità 2003)

12*. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$, quante sono le possibili applicazioni (funzioni) di A in B? (Maturità 2004)

13*. In una classe di 25 alunni, quante sono le possibili terne di rappresentanti? (Maturità 2004)

14*. Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra cui Antonio e Pietro. Quanti sono i possibili ordini di arrivo che registrino ntonio e Pietro fra i primi tre classificati? (Maturità 2004)

15*. Come si definisce $n!$ (n fattoriale)? Qual è il suo significato nel calcolo combinatorio? Qual è il legame fra il fattoriale e i coefficienti binomiali? Perchè? (Maturità 2005)

16*. Dimostare l'identità $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, con $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k > 0$. Essa spiega una delle regole della costruzione del "triangolo di Tartaglia": enunciarla. (Maturità 2005)

17*. Calcolare quante sono le possiili cinquine che si possono estrarre da un'urna contenente i numeri da 1 a 90, ciascuna delle quali contenga i numeri 1,2 e 3. (Maturità 2005)

18*. Le parti letterali dello sviluppo della potenza $(a+b)^10$, ordinate secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, sono

$$a^10,\ a^9b,\ a^8b^2,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ ab^9,\ b^10.$$

Elencare i loro coefficienti e giustificare la risposta. (Maturità 2005)

19*. Una classe è formata da 15 alunne e 12 alunni. Quante sono le possibili delegazioni formate da 3 alunne e 2 alunni? (Maturità 2005)

20*. Dimostrare che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$. (Maturità 2006)