

Programma del corso di Geometria - Ingegneria Meccanica

a.a. 2012-13

Capitolo I. Nozioni preliminari

Quantificatori e connettivi logici. Operazioni fra insiemi. Relazioni e funzioni. Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche. Relazioni di equivalenza, classi di equivalenza e insieme quoziente. Strutture algebriche: gruppi e campi. Esempi.

Capitolo II. Spazi vettoriali

Definizione di spazio vettoriale a coefficienti in un campo. Esempi di spazi vettoriali: spazio delle n-uple a coefficienti in un campo K^n , spazio delle matrici $M(m,n; K)$, spazio dei polinomi a coefficienti reali con grado minore o uguale di n $R[x]_{\text{deg} \leq n}$, spazio dei vettori liberi.

Capitolo III. Sottospazi vettoriali

Definizione di sottospazio vettoriale. Verifiche di sottospazi. Sottospazio intersezione. Sottospazio somma. Combinazioni lineari. Sottospazio vettoriale generato da un insieme di vettori. Caratterizzazione di $\text{Span}(A)$ come il più piccolo sottospazio vettoriale contenente A rispetto all'inclusione. Insiemi di generatori.

Capitolo IV. Lineare indipendenza e basi di uno spazio vettoriale

Definizione di lineare indipendenza fra vettori. Caratterizzazione della lineare dipendenza fra vettori. Basi di uno spazio vettoriale. Teorema della base. Teorema di esistenza di una base. Teorema della dimensione. Definizione di dimensione di uno spazio vettoriale. Esercizi ed esempi. Dimensione e basi canoniche degli spazi vettoriali modello: K^n , $M(m,n; K)$, $R[x]_{\text{deg} \leq n}$, spazio dei vettori liberi. Formula di Grassmann. Basi ordinate. Componenti di un vettore rispetto ad una base.

Capitolo V. Matrici

Prodotto riga per colonna fra matrici e sue proprietà. Trasposta di una matrice. Proprietà dell'operazione di trasposizione. Inversa di una matrice e sue proprietà. Il gruppo generale lineare $GL(n; K)$.

Capitolo VI. Determinante di una matrice

Permutazioni. Definizione di determinante di una matrice quadrata. Proprietà del determinante. Applicazioni: determinante di una matrice 2×2 e di una matrice 3×3 (regola di Sarrus). Primo metodo per il calcolo del determinante. Complemento algebrico. Teorema di Laplace. Secondo metodo per il calcolo del determinante. Applicazione: calcolo esplicito degli elementi dell'inversa di una matrice quadrata. Condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità di una matrice quadrata.

Capitolo VII. Rango di una matrice

Definizione di rango e sue proprietà. Minori di una matrice. Primo teorema di Kronecker. Orlo di un minore. Secondo teorema di Kronecker (senza dimostrazione). Calcolo del rango di una matrice.

Capitolo VIII. Sistemi lineari

Sistemi lineari. Sistemi compatibili. Sistemi a gradino e loro risolubilità. Metodo di eliminazione di Gauss-Jordan. Sistemi di Cramer e loro risoluzione. Teorema di Rouchè-Capelli. Secondo metodo risolutivo dei sistemi lineari. Lineare indipendenza fra vettori di \mathbb{R}^n mediante il concetto di rango. Esercizi ed esempi numerici e dipendenti da parametro.

Capitolo IX. Applicazioni lineari

Definizione di applicazione lineare. Esempi. Proprietà di un'applicazione lineare. Nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Teorema circolare sulle condizioni equivalenti all'iniettività. Formula della dimensione di nucleo e immagine. Iniettività e suriettività di un'applicazione lineare. Matrice associata ad un'applicazione lineare. Rango di un'applicazione lineare. Esercizi ed esempi. Determinazione della matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto a una coppia di basi, date le sue equazioni; determinazione delle equazioni associate ad un'applicazione lineare, data la matrice ad essa associata rispetto ad una coppia di basi.

Capitolo X. Cambiamenti di base e trasformazioni delle coordinate

Matrice di cambiamento di base. Formule di trasformazione delle coordinate. Relazione fra matrici associate ad una stessa applicazione lineare rispetto a coppie di basi diverse. Caso particolare di matrici associate ad uno stesso endomorfismo rispetto a basi diverse. Matrici simili.

Capitolo XI. Prodotto scalare

Definizione di prodotto scalare. Definizione di spazio vettoriale euclideo reale. Norma di un vettore e sue proprietà. Angolo fra vettori. Teorema di Carnot. Ortogonalità fra vettori. Parallelismo fra vettori. Condizioni necessarie e sufficienti per il parallelismo e l'ortogonalità fra vettori. Complemento ortogonale di un insieme di vettori. Ortonormalità. Esistenza di basi ortonormali. Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Matrice associata a un prodotto scalare.

Capitolo XII. Prodotto vettoriale e prodotto misto

Definizione di prodotto vettoriale e sue proprietà. Interpretazione geometrica del prodotto vettoriale. Definizione del prodotto misto e sua interpretazione geometrica.

Capitolo XIII. Autovalori e autovettori

Autovalori e autovettori di un endomorfismo. Autospazi. Polinomio caratteristico di un endomorfismo e di una matrice. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore. Teorema spettrale. Condizioni necessarie e sufficienti di diagonalizzabilità. Esercizi ed esempi.

Capitolo XIV. Il piano euclideo

Il piano euclideo E^2 . Riferimenti cartesiani. Formule di trasformazione delle coordinate cartesiane. Rette in E^2 . Equazioni della retta in E^2 . Posizione reciproca fra rette. Giacitura di una retta. Vettore direttore e sua interpretazione geometrica. Coefficienti direttori di una retta. Parallelismo e perpendicolarità fra rette. Esercizi ed esempi. Distanza euclidea fra punti di E^2 . Distanza fra un punto e una retta. Applicazioni: equazione della circonferenza; equazioni delle bisettrici degli angoli formati da una coppia di rette; area di un triangolo. Isometrie piane dirette e inverse. Classificazione delle isometrie piane. Coordinate polari.

Capitolo XV. Lo spazio euclideo

Lo spazio euclideo E^3 . Riferimenti cartesiani. Formule di trasformazione delle coordinate. Equazioni di un piano in E^3 . Giacitura di un piano. Vettore direttore di un piano e sua interpretazione geometrica. Posizioni reciproche fra piani. Condizioni di parallelismo e perpendicolarità fra piani. Equazioni di una retta in E^3 . Posizioni reciproche fra rette. Condizioni di parallelismo e perpendicolarità fra rette. Posizioni reciproche fra rette e piani. Condizioni di parallelismo e perpendicolarità fra una retta e un piano. Distanza euclidea. Distanza fra un punto e un piano. Distanza fra rette. Distanza fra una retta e un piano. Fasci di piani. Esercizi ed esempi.

Capitolo XVI. Coniche del piano euclideo

Affinità e isometrie. Coniche come luoghi geometrici. Matrice associata ad una conica. Classificazione affine delle coniche. Esercizi ed esempi numerici e dipendenti da un parametro.