Cognome: **Nome**: **Ing.**

Prova scritta di Geometria

Esercizio 1. (8 punti) Siano dati nel piano euclideo con riferimento cartesiano $\mathrm{RC}(O, \vec{i}, \vec{j})$ i punti $A \equiv (-1, 2)$, $B \equiv (3, 0)$ e $C \equiv (-1, -1)$.

(a) Individuare il piede della perpendicolare H condotta da C al lato AB.

(b) Individuare il punto medio del lato AB.

(c) Determinare le equazioni parametriche della retta r per C e parallela ad AB.

(d) Determinare equazioni parametriche e cartesiane dell'asse del segmento AB.

(e) Calcolare perimetro e area del triangolo di vertici A, B e C.

(f) Scrivere l'equazione della circonferenza di diametro AB.

Esercizio 2. (7 punti) Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare quante righe e quante colonne linearmente indipendenti ci sono in A.

(b) Stabilire quali prodotti fra le matrici A, B e C siano eseguibili e calcolarli.

(c) Stabilire se B è invertibile e in tal caso determinarne la matrice inversa.

(d) Calcolare $\det(B)$, $\det(4B)$, $\det(B^{-1})$, $\det(B^3)$.

(e) Scrivere la matrice $D = {}^tA$ e calcolare $A \cdot D + 4B$.

Esercizio 3. (8 punti) Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da $T(x, y, z) = (2x, x+y-z, 3z)$.

(a) Definire i concetti di *autovalore* e *autovettore* di un endomorfismo.

(b) Determinare la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(c) Calcolare gli autovalori di T e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

(d) Dire se T è diagonalizzabile, giustificando la risposta. Eventualmente scrivere una matrice D diagonale associata a T.

(e) Scrivere, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T.

Esercizio 4. (9 punti) Nello spazio euclideo, con riferimento cartesiano $\mathrm{RC}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, siano dati il punto $P \equiv (1, -2, 1)$, il vettore $\bar{u} = (1, 0, -2)$ e la retta $r) \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z + 2 = 0 \end{cases}$.

(a) Scrivere le coordinate del punto $A \in r$ di ascissa nulla.

(b) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta s passante per il punto A e parallela al vettore $\bar{u}$.

(c) Scrivere l'equazione del piano α passante per P e perpendicolare a r.

(d) Determinare se esiste un piano che contiene entrambe le rette r e s.

(e) Scrivere l'equazione della retta t passante per P e perpendicolare a r e a s.

Autorizzazione Il sottoscritto ....., ai sensi della vigente legge sulla privacy, autorizza la pubblicazione dell'esito di questa prova nel sito internet dell'Università Politecnica delle Marche. Firma.....