Risoluzione del...

Scritto di Geometria

Corso di Ingegneria Civile e Ambientale

A. A. 2017/18 – Prova scritta 16–09–2018

Cognome e Nome: ______________________________ Matricola: ______________

Vietato l'uso di calcolatori, appunti, eserciziari,... Scrivi in modo ordinato e motiva ogni risposta.

Durata della prova: 2 ore e 30 minuti. Non si può lasciare l'aula prima che siano trascorse due ore. Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato il compito.

(1) ($10\star$) Date le due basi di $\mathbb{R}^3$

$$C = \{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\} \quad \text{e} \quad B = \{(1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T\},$$

e l'applicazione lineare $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $S(a,b,c)^T = (3a+b-c, 4b, 3c+b+a)^T$ scrivi le matrici $\mathscr{M}_C^C(S)$ e $\mathscr{M}_B^B(S)$ associate a questa applicazione lineare. Scrivi le matrici di cambio base $\mathscr{M}_B^C(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ e $\mathscr{M}_C^B(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Calcola autovalori e autovettori di S. Se esiste una base di autovettori $\mathcal{B}$, scrivila e scrivi la matrice associata rispetto a questa base, ovvero $\mathscr{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(S)$.

(2) ($6\star$) Risulta ben definita un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T(1,2,-1)^T = (1,0)^T, \quad T(1,1,1)^T = (1,1)^T, \quad T(1,-1,5)^T = (2,1)^T\ ?$$

Quante applicazioni lineari che soddisfano le precedenti condizioni esistono? Se esiste almeno un'applicazione lineare con queste proprietà, scelta una base di $\mathbb{R}^3$, scrivere la matrice associata a questa applicazione lineare.

(3) ($6\star$) Date le applicazioni lineari $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tali che $\Psi(x,y,z) = (x+y-z, 3x-y+2z)$ e $\Phi(x,y) = (2x+y, y, x-y)$. Scrivere le matrici associate (rispetto alla base canonica) delle applicazioni lineari $\Gamma_1 = \Psi \circ \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\Gamma_2 = \Phi \circ \Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(4) ($6\star$) Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la posizione delle due rette $r_1 : P = (2k+1, k-1, k+1) + t(1, 2k, k+1)$ e $r_2 : P = (k+1, 1, k+3) + t(k-1, k+2, 5-k)$. Per i valori di k per cui risultano incidenti fornire l'angolo che esse formano. Per i valori di k per cui risultano parallele fornire la direzione delle due rette.

(5) ($6\star$) Considerare la funzione $f(x,y) = x^\alpha + y^\beta$ dove $x, y \in \mathbb{R}^+$ e le potenze $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Verificare che la proposizione

$$(P) \qquad f(\lambda^p x, \lambda^q y) = \lambda^{p+q} f(x,y) \qquad \text{per ogni } \lambda, x, y > 0$$

è sempre soddisfatta per la scelta $p = q = 0$. Per quali coppie (α, β) esistono $p, q \in \mathbb{R}$ non nulli tali che (P) è vera? *(Suggerimento: sostituire la definizione della funzione f nella formula (P) e raccogliere i coefficienti delle potenze x^α e y^β. Si ottiene un sistema di equazioni nelle variabili p e q con parametri α e β.)*

(5') *Alternativa:* ($4\star$) Se non riesci a fare quanto sopra risolvi il sistema

$$\begin{cases} (a-1)x - y = 0 \\ x + (1-b)y = 0 \end{cases}$$

al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Il sottoscritto ______________________________ ai sensi della vigente legge sulla privacy, autorizza la pubblicazione dell'esito di questa prova scritta sul sito internet del corso.

Firma: ______________________________

Scritto di Geometria

Corso di Ingegneria Civile e Ambietale

A. A. 2016/17 – Prova scritta xx–01–2018

Risposte:

(1) (10$\star$) Date le due basi di $\mathbb{R}^3$

$$C = \{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\} \quad \text{e} \quad B = \{(1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T\},$$

e l'applicazione lineare $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$S(a,b,c)^T = (3a + b - c, 4b, 3c + b + a)^T$$

scrive le matrici $\mathscr{M}_C^C(S)$ e $\mathscr{M}_B^B(S)$ associate a questa applicazione lineare. Scrivi le matrici di cambio base $\mathscr{M}_B^C(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ e $\mathscr{M}_B^C(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Calcola autovalori e autovettori di S. Se esiste una base di autovettori $\mathscr{B}$, scrivila e scrivi la matrice associata rispetto a questa base, ovvero $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(S)$.

Risposte:

$$\mathscr{M}_C^C(S) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathscr{M}_B^B(S) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

con matrici di cambio base

$$\mathscr{M}_B^C(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathscr{M}_C^B(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalore: 4 semplice con autovettore $(0,1,1)^T$. Quindi S non è diagonalizzabile.

(2) I tre vettori $v_1 = (1,2,-1)^T$, $v_2 = (1,1,1)^T$ e $v_3 = (1,-1,5)^T$, sono linearmente dipendenti, infatti $2v_1 - 3v_2 + 1v_3 = 0$. Affinché risulti ben definita un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

dovrei ottenere $T(2v_1 - 3v_2 + 1v_3) = T(0) = 0$, invece trovo

$$T(2v_1 - 3v_2 + 1v_3) = 2T(v_1) - 3T(v_2) + T(v_3) = 2(1,0)^T - 3(1,1)^T + (2,1)^T = (1,-2) \neq (0,0)^T$$

Quindi non esistono siffatte applicazioni lineari.

(3) Date le applicazioni lineari $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tali che $\Psi(x,y,z) = (x+y-z, 3x-y+2z)$ e $\Phi(x,y) = (2x+y, y, x-y)$. Scrivere le matrici associate (rispetto alla base canonica) delle applicazioni lineari $\Gamma_1 = \Psi \circ \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\Gamma_2 = \Phi \circ \Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Soluzione: posso scrivere le matrici associate a Ψ e Φ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ denotate rispettivamente con C_2 e C_3:

$$\mathscr{M}_{C_3}^{C_2}(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathscr{M}_{C_2}^{C_3}(\Phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Usando il prodotto riga per colonna troviamo

$$\mathscr{M}_{C_2}^{C_2}(\Gamma_1) = \mathscr{M}_{C_3}^{C_2}(\Psi)\mathscr{M}_{C_2}^{C_3}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{M}_{C_3}^{C_3}(\Gamma_2) = \mathscr{M}_{C_2}^{C_3}(\Phi)\mathscr{M}_{C_3}^{C_2}(\Psi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(4) Si deve discutere il rango delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 2k & k+1 \\ k+1 & 5-k \end{pmatrix} \quad e \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & k \\ 2k & k+1 & k-2 \\ k+1 & 5-k & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice A ha rango 1 se vale $k = 2$, altrimenti ha rango 2. Possiamo ridurre a scala (parzialmente) la matrice A' ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & k-1 & k \\ 0 & 2k^2-3k-2 & 2k^2-k+2 \\ 0 & k^2+k-6 & k^2+k+2 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha lo stesso rango di A'. Per calcolare il rango di quest'ultima, ad esempio, è sufficiente studiare il suo determinante che risulta $k^3 - 5k^2 + 8k + 4 = (k-1)(k-2)^2$ scomponibile con il metodo di Ruffini. Troviamo

$$\text{per } k = 2: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \text{ per } k = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Si vede che in entrambi le matrici hanno rango 2. Concludiamo quindi che:

	rg A	rg A'	
$k = 2$	1	2	*parallele*
$k = 1$	2	2	*incidenti*
$k \neq 1, 2$	2	3	*sghembe*

Per $k = 2$ hanno entrambe direzione $(1, 4, 3)$, per $k = 1$ hanno direzione $(1, 2, 2)$ e $(0, 3, 4)$ da cui calcoliamo il coseno dell'angolo α tra le rette:

$$\cos\alpha = \frac{\langle (1,2,2)\,,\,(0,3,4)\rangle}{\|(1,2,2)\|\,\|(0,3,4)\|} = \frac{14}{15}.$$

(5) Sostituendo $f(x, y) = x^\alpha + y^\beta$ in

$$(P) \qquad f(\lambda^p x, \lambda^q y) = \lambda^{p+q} f(x, y) \qquad \text{per ogni } \lambda, x, y > 0$$

trovo

$$(\lambda^p x)^\alpha + (\lambda^q y)^\beta = \lambda^{p+q}(x^\alpha + y^\beta) \qquad \text{per ogni } \lambda, x, y > 0$$

da cui

$$\lambda^{\alpha p} x^\alpha + \lambda^{\beta q} y^\beta = \lambda^{p+q} x^\alpha + \lambda^{p+q} y^\beta \qquad \text{per ogni } \lambda, x, y > 0$$

$$(\lambda^{\alpha p} - \lambda^{p+q}) x^\alpha + (\lambda^{\beta q} + \lambda^{p+q}) y^\beta = 0 \qquad \text{per ogni } \lambda, x, y > 0$$

da cui devo porre uguale a zero i termini in parentesi:

$$\begin{cases} \lambda^{\alpha p} - \lambda^{p+q} = 0 \\ \lambda^{\beta q} + \lambda^{p+q} = 0 \end{cases} \qquad \text{per ogni } \lambda > 0$$

Affinché il sistema sia valido devo avere le stesse potenze:

$$\begin{cases} \alpha p = p + q \\ \beta q = p + q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (\alpha - 1)p - q = 0 \\ p + (1 - \beta)q = 0 \end{cases}$$

Ottengo il sistema dell'esercizio alternativo (con variabili e parametri con nome differente). Essendo un sistema omogeneo (nelle variabili p e q), esso ammette sempre la soluzione banale $(p, q) = (0, 0)$. Abbiamo soluzioni non nulle quando

$$0 = \det \begin{pmatrix} \alpha - 1 & -1 \\ 1 & 1 - \beta \end{pmatrix} = (\alpha - 1)(1 - \beta) + 1 = -\alpha\beta + \alpha + \beta$$

ovvero quando $\alpha^-1 + \beta^-1 = 1$ o equivalentemente $\alpha = \frac{\beta}{\beta - 1}$ da cui notiamo che (essendo $\beta > 0$) perché valga anche $\alpha > 0$ dobbiamo chiedere $\beta > 1$. Ne consegue che vale anche $\alpha > 1$. Quindi per ogni scelta $\beta > 1$, ponendo $\alpha = \frac{\beta}{\beta - 1}$, abbiamo soluzioni non nulle per il sistema.