Risoluzione del...

Scritto di Geometria

Corso di Ingegneria Civile e Ambientale

A. A. 2017/18 – Prova scritta 04–04–2018

Cognome e Nome: ______________________________ Matricola: ______________

Vietato l'uso di calcolatori, appunti, eserciziari,...

Scrivi in modo ordinato e motiva ogni risposta.

Durata della prova: 2 ore e 30 minuti.

Non si può lasciare l'aula prima che siano trascorse due ore. Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato il compito.

(1) ($4\star$) Dati i vettori $v_1 = (3,0,-1)^T$, $v_2 = (1,4,1)^T$, $v_3 = (-1,0,3)^T$, dire perché è univocamente determinata un'applicazione lineare $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $S(v_1) = -v_1 + v_2 - 2v_3\,,\quad S(v_2) = v_1 + v_2\,,\quad S(v_3) = -v_2 + v_3$. Scrivere quindi la matrice associata a S rispetto ad una base $\mathcal{B}$ scelta (specificare gli elementi che compongono $\mathcal{B}$).

(2) ($8\star$) Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x \\ x + y - z \\ z - 2x \end{pmatrix}$$

Scrivere quindi la matrice associata a T rispetto ad una base B scelta. Individua gli autovalori di T e i relativi autovettori. Stabilisci se T è diagonalizzabile. In caso affermativo scrivi una base $\widetilde{B}$ di autovettori e la matrice associata a T rispetto a questa base.

(3) ($8\star$) Date le due rette

$$r_1 : \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ x - 4y - 3z = 6 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x + y + 2z = -3 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

discutere la loro posizione reciproca. Verificare che entrambe sono ortogonali alla retta r_3 passante per i punti $P_1 = (7,5,3)$ e $P_2 = (3,1,-5)$.

Scrivere equazioni parametriche o cartesiane del piano π contenente le rette r_1 e r_2.

Scrivere equazioni parametriche o cartesiane del piano σ_1 parallelo alla retta r_1 e contenente la retta r_3. Scrivere equazioni parametriche o cartesiane del piano σ_2 parallelo alla retta r_2 e contenente la retta r_3.

(4) ($8\star$) Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^6$, trova una base del sottospazio vettoriale

$$W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid x_1 + x_3 + x_5 = 0\,,\ x_1 + x_2 + x_5 = 0\,,\ x_1 + x_3 + x_4 = 0\,,\ x_1 + x_2 + x_4 = 0\}\,.$$

Completare la base di W a una base di $\mathbb{R}^6$. Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$ che abbia W come nucleo? Esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ che abbia W come immagine? In caso di risposte affermative, fornire un esempio. In caso di risposta negativa, fornire una motivazione.

(5) ($6\star$) Dimostrare che l'applicazione $b : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da $b(A_1, A_2) = tr(A_1)tr(A_2)$ è bilineare e simmetrica — $tr(M)$ indica la traccia della matrice M —. Scriverne poi la matrice associata rispetto ad una base scelta. Studiarne il segno. Individuarne il nucleo.

Scritto di Geometria

Corso di Ingegneria Civile e Ambietale

A. A. 2016/17 – Prova scritta xx–01–2018

Risposte:

(1) L'applicazione lineare risulta univocamente determinata in quanto i vettori v_1, v_2, v_3 formano una base di $\mathbb{R}^3$. Infatti scrivendo in colonna in una matrice le loro coordinate otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 (usando la riduzione a scala o verificando che il determinante è diverso da zero), quindi le colonne sono linearmente indipendenti, quindi formano un sottospazio di dimensione 3 in $\mathbb{R}^3$ quindi ne formano una base. La matrice asociata all'applicazione lineare risulta

$$\mathscr{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(S) = M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

scegliendo la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

(2) La matrice associata all'applicazione lineare risulta

$$\mathscr{M}_B^B(T) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

scegliendo la base canonica $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Trovo gli autovalori: $0, -1, 2$, con autovettori rispettivamente:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Concludiamo osservando che T è diagonalizzabile (ha 3 autovalori distinti!) e abbiamo già individuato 3 autovettori. Quindi avremo $\widetilde{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ e scrivo facilmente la matrice associata

$$\mathscr{M}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) Scrivendo la matrice dei coefficienti delle equazioni cartesiane delle due rette

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

e riducendola a scala

$$\xrightarrow{scambi} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{II^a - I^a; III^a - I^a; IV^a - I^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II^a/(-3); IV^a/(-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{9}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{III^a - II^a; IV^a - II^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

siamo nel caso in cui il rango di A è due, mentre il rango di $(A|b)$ è tre. Quindi le rette sono parallele. Passando in equazioni parametriche (ovvero risolvendo i due sistemi che descrivono le rette) si osserva che esse hanno giacitura $v = (1, 1, -1)$ e passano rispettivamente per i punti $R_1 = (2, -1, 0)$ e $R_2 = (-2, -1, 0)$. Le equazioni parametriche sono quindi $r_1 : P = R_1 + tv$ e $r_2 : P = R_2 + tv$.

La retta r_3 ha giacitura $w = P_1 - P_2 = (4, 4, 8)$. Le equazioni parametriche sono quindi $r_3 : P = P_1 + tw$ ad esempio. Si calcola quindi il prodotto scalare $v \cdot w = (1, 1, -1) \cdot (4, 4, 8) = 4 + 4 - 8 = 0$ verificando che sono ortogonali.

Le equazioni parametriche per π si ricavano ad esempio come $\pi : P = R_1 + tv + su$ dove il vettore $u = R_1 - R_2 = (4, 0, 0)$, aggiungendo alle equazioni parametiche di r_1 la direzione u individuata da due generici punti uno della retta r_1 e uno della retta r_2.

Il piano σ_1 si ottiene facilmente in equazioni parametriche partendo dalle equazioni parametriche di r_3 aggiungendo la direzione della retta r_1. Quindi abbiamo $\sigma_1 : P = P_1 + tw + sv$. A questo punto si vede che σ_2 è lo stesso piano σ_1 essendo r_1 e r_2 parallele.

(4) Bisogna risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0$$

La matrice, ridotta a scala diventa

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avente tre pivot (in grassetto). Quindi lo spazio delle soluzioni del sistema ha dimensione 3. I parametri liberi vanno inseriti dove non ci sono i pivot, quindi ponendo $x_3 = \alpha$, $x_5 = \beta$, $x_6 = \gamma$, troviamo le soluzioni

$$\alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{z_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{z_2} + \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{z_3}$$

dove questi vettori costituiscono la base di W richiesta. Posso estendere la base aggiungendo elementi dalla base canonica in modo da ottenere vettori linearmente indipendenti: posso scegliere e_1, e_2, e_4. Un calcolo esplicito si ottiene scrivendo in colonna la base canonica a fianco dei precedenti vettori in un'unica matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

poi riducendo a scala la matrice e individuando i pivot (che dovrebbero uscire nelle colonne 1,2,3,4,5,7).

Non esiste l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$ con questa proprietà: infatti dal teorema della dimensione troviamo che il nucleo deve avere per forza dimensione almeno 4, mentre W ha dimensione 3. Invece esistono applicazioni $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ aventi W come immagine. È sufficiente prendere una base di $\mathbb{R}^4$ (per esempio quella canonica) e assegnare ad ogni elemento di questa base un elemento di W, la scelta più veloce si fa usando proprio i vettori z_1, z_2, z_3. Quindi si potrebbe porre $g(e_1) = z_1$, $g(e_2) = z_2$, $g(e_3) = z_3$, $g(e_4) = z_1$. L'importante è sceglierli tutti e tre almeno una volta, altrimenti l'immagine ha dimensione più bassa.

(5) Bilinearità:

$$\begin{aligned} b(A_1 + B_1, A_2) = tr(A_1 + B_1)tr(A_2) &= (tr(A_1) + tr(B_1))tr(A_2) \\ &= tr(A_1)tr(A_2) + tr(B_1)tr(A_2) = b(A_1, A_2) + b(B_1, A_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(A_1, A_2 + B_2) = tr(A_1)tr(A_2 + B_2) &= tr(A_1)(tr(A_2) + tr(B_2)) \\ &= tr(A_1)tr(A_2) + tr(A_1)tr(B_2) = b(A_1, A_2) + b(A_1, B_2) \end{aligned}$$

$$b(\mu A_1, A_2) = tr(\mu A_1)tr(A_2) = \mu\, tr(A_1)tr(A_2) = \mu\, b(A_1, A_2)$$

$$b(A_1, \mu A_2) = tr(A_1)tr(\mu A_2) = tr(A_1)\, \mu\, tr(A_2) = \mu\, tr(A_1)tr(A_2) = \mu\, b(A_1, A_2)$$

Simmetria: $b(A_1, A_2) = tr(A_1)tr(A_2) = tr(A_2)tr(A_1) = b(A_2, A_1)$. La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con nucleo

$$\text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ovvero il sottospazio delle matrici a traccia nulla. Inoltre è semi-definita positiva, infatti $b(A, A) = tr(A)^2 \geq 0$. Essa non è definita positiva in quanto il nucleo non è banale.