Risoluzione del...

Scritto di Geometria

Corso di Ingegneria Civile e Ambientale

A. A. 2017/18 – Prova scritta 15–02–2018

Cognome e Nome: ______________________________________ Matricola: ______________

Vietato l'uso di calcolatori, appunti, eserciziari,...

Scrivi in modo ordinato e motiva ogni risposta.

Durata della prova: 2 ore e 30 minuti.

Non si può lasciare l'aula prima che siano trascorse due ore. Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato il compito.

(1) ($10\star$) Fornire una base B dello spazio vettoriale $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2x2 e considerare l'applicazione lineare $\Phi : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ definita come

$$\Phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+d & a+b-c \\ c+2d & a-b \end{pmatrix}$$

Scrivere la matrice $\mathscr{M}_B^B(\Phi)$ associata. L'endomorfismo è invertibile? L'endomorfismo è diagonalizzabile? Se sì scrivere una base di autovettori C e la matrice associata $\mathscr{M}_C^C(\Phi)$.

Dato $Z \subset \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici a traccia nulla, verificare che $\Phi(M) \in Z$ per ogni $M \in Z$.

(2) ($4\star$) Considerare il sottospazio vettoriale $X \subset \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche 3x3 a traccia nulla. Fornire una base $\mathcal{B}$ di X. Rispetto a questa base scrivere la matrice $\mathscr{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ associata all'applicazione *trasposizione*: $T : \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $T(A) = A^t$.

(3) ($4\star$) Dire se i seguenti polinomi di $\mathbb{R}_3[t]$ sono linearmente dipendenti

$$p(t) = t^2 - 2t\,, \quad q(t) = t^3 + t - 1\,, \quad r(t) = 2t^3 + t^2 - 2$$

e in caso affermativo fornire i coefficienti non banali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r = 0$.

(4) ($6\star$) Data la matrice $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, è definita l'applicazione lineare $S : \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \to Y$, tale che $S(M) = MG$ (prodotto riga per colonna).

a. Specificare lo spazio vettoriale Y corretto affinché S sia ben definita;

b. scrivere la matrice associata a S rispetto a due basi B_1 e B_2 rispettivamente di $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ e Y, a scelta;

c. calcolare immagine e nucleo di S e fornire una base di entrambi.

(5) ($8\star$) Dato il piano $\pi : \;\; x - 2y + 3x - 5 = 0$ trovare le equazioni cartesiante della retta r_1 ortogonale al piano π passante per il punto $P = (3, -2, 4)^T$. Trovare le equazioni (parametriche o cartesiane a scelta) della retta r_2 passante per $(1, 1, 1)$, parallela al piano π e ortogonale alla retta $r_3 : \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 3 \\ x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$.

Trovare il piano σ tangente alla quadrica $\gamma : x^2 + 2y^2 - z^2 + 6xy + 2yz - 2xz - 4y + 2z - 1 = 0$ nel punto $Q = (1, -1, 0)^T$ e discutere la posizione reciproca dei piani σ e π.

Scritto di Geometria

Corso di Ingegneria Civile e Ambietale

A. A. 2016/17 – Prova scritta 15–02–2018

Risposte:

(1) Presa la base canonica

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

la matrice risulta

$$\mathscr{M}_B^B(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo del polinomio caratteristico:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-\lambda)^2 + (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 1) - 2(\lambda - 1)$$

$$= (\lambda - 1)[-(\lambda - 1) + (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) - 2]$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda) = (\lambda - 1)\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1)\,.$$

Quindi gli autovalori sono $-1, 0, 1, 2$. Sono 4 e tutti distinti con molteplicità algebrica 1. Possiamo quindi già concludere che Φ è diagonalizzabile. Inoltre, essendo presente lo zero tra gli autovalori non è nemmeno un isomorfismo. Il calcolo degli autovettori porta a:

$$\Phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

quindi la base di autovettori risulta

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

con matrice associata

$$\mathscr{M}_C^C(\Phi) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per l'ultimo punto si ragiona così: se la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ha traccia nulla allora vale $a+d = 0$. L'immagine $\Phi(M)$ ha traccia $(b+d) + (a-b) = d + a = 0$, quindi $\Phi(M) \in Z$.

(2) Una possibile base di X è data da:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \right\}$$

La matrice $\mathscr{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ è la matrice 5x5 identità I_5 (per ogni scelta della base, perché la trasposizione sulle matrici simmetriche lascia invariata la matrice, quindi $T(E) = E$ per ogni $E \in \mathcal{B}$.

(3) Per rispondere a questa domanda dobbiamo innanzitutto trovare le coordinate dei tre polinomi rispetto ad una base: scegliamo la base canonica $\{1, t, t^2, t^3\}$. Quindi scrivere la matrice avente per colonne tali coordinate e ridurla a scala

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{scambi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{II^a+2I^a;IV^a+III^a}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III^a+II^a}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e trovo che ha rango 2, quindi i tre polinomi generano uno spazio di dimensione 2, quindi sono linearmente indipendenti. Risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice trovo la soluzione $(t, 2t, -t)^T$ da cui la combinazione lineare: $p + 2q - r = 0$.

(4) Secondo le regole del prodotto riga per colonna, deve essere $Y = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Scegliendo le basi canoniche dei due spazi trovo la matrice

$$\mathscr{M}_B^C(T) = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

La riduzione a scala si fa così ad esempio

$$\overset{scambi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \overset{II^a-2I^a,IV^a-2III^a}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}$$

e trovo quattro pivot. L'immagine ha quindi dimensione 4, quindi coincide con tutto lo spazio $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ (di cui si può fornire la base canonica) e il nucleo ha dimensione 2 con base che si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $\mathscr{M}_B^C(T)$ di cui abbiamo pronta la riduzione a scala:

$$\{(1, -1, 1, 0, 0, 0)^T \,;\, (0, 0, 0, 1, -1, 1)^T\}$$

(5) Dall'equazione cartesiana del piano si trova immediatamente il vettore direttore v_1 (la direzione) di r_1 e di conseguenza le equazioni parametriche sono:

$$r_1 : P_1 + tv_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

da cui ricavo le equazioni cartesiane

$$r_1 : \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - z = 5\,. \end{cases}$$

La retta r_3 ha direzione $v_3 = (2, 1, 2)^T$. La retta r_2 quindi ha direzione v_2 ortogonale sia a v_3 che al vettore v_1 (la retta r_2, dovendo essere parallela al piano deve essere ortogonale al vettore ortogonale al piano). Per trovare un vettore ortogonale a due dati basta calcolare il prodotto vettoriale

$$v_2 = v_1 \times v_3 = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

trovando

$$r_2 : P_2 + tv_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Infine, calcolando la matrice associata alla quadrica, trovo il piano σ:

$$\sigma : \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x + y + z - 1 .$$

Se scriviamo la matrice associata alle equazioni cartesiane dei piani σ e π troviamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -5 \end{array} \right)$$

dove la matrice incompleta $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango 2, quindi i piani sono incidenti.