Risoluzione del...

Scritto di Geometria

Corso di Ingegneria Civile e Ambientale

A. A. 2017/18 – Prova scritta 18–01–2018

Cognome e Nome: ______________________________ Matricola: ______________

Vietato l'uso di calcolatori, appunti, eserciziari,...

Scrivi in modo ordinato e motiva ogni risposta.

Durata della prova: 2 ore e 30 minuti.

Non si può lasciare l'aula prima che siano trascorse due ore. Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato il compito.

TESTO 1

(1) (3⋆) L'applicazione $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita come $b(x, y) = \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, è bilineare?

(2) (3⋆) Esistono matrici di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ aventi determinante 2018, non diagonali, con traccia negativa?

(3) (10⋆) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, considerare l'applicazione $T : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ definita tramite la legge $T(B) = AB - BA$ (differenza di prodotti riga per colonna).

- a) Dimostra che l'applicazione T è lineare,
- b) Scrivi la base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Se non la ricordi, scrivi una base a scelta e usa questa nei prossimi passaggi.
- c) Trova la matrice M associata a questa applicazione lineare rispetto alla base $\mathcal{C}$, ovvero $\mathscr{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(T)$.
- d) Trova gli autovalori di T e i relativi autovettori.
- e) T è un isomorfismo?
- f) T è diagonalizzabile? Se sì scrivi una base $\mathcal{B}$ di autovettori, scrivi quindi la matrice di cambio base $\mathscr{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})})$ e la matrice $\mathscr{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T)$.

(4) (8⋆) Data la matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, è definita l'applicazione lineare $S : \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \to Y$, tale che $S(M) = GM$ (prodotto riga per colonna).

- a. Specificare lo spazio vettoriale Y corretto affinché S sia ben definita;
- b. scrivere la matrice associata a S rispetto a due basi B e C rispettivamente di $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ e Y, a scelta;
- c. calcolare immagine e nucleo di S e fornire una base di entrambi.

(5) (8⋆) Dati tre punti $P_1 = (1, 2, 3), P_2 = (2, -1, -2), P_3 = (2, 1, 2)$,

- a. scrivere le equazioni parametriche e cartesiane del piano π che li contiene;
- b. scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta r contenente P_1 e P_2;
- c. determinare l'area del triangolo T di vertici P_1, P_2, P_3;
- d. scrivere le equazioni (parametriche o cartesiane) della retta s contenuta in π, ortogonale a r, passante per P_3. Chi è la retta s?

Il sottoscritto ______________________________ ai sensi della vigente legge sulla privacy, autorizza la pubblicazione dell'esito di questa prova scritta nel sito internet del corso.

Firma: ______________________________

Risposte:

(1) Ovviamente no. Alcune delle possibili dimostrazioni (anche per qualche preciso valore, come ad esempio $\pi/2$):

$$\sin(x+y) = b(x+y,0) \neq b(x,0) + b(y,0) = \sin x + \sin y\,,$$
$$\sin(2x) = b(2x,0) \neq 2b(x,0) = 2\sin x\,,$$
$$\sin(x) = b(2x,-x) \neq 2b(x,-x) = 2\sin 0 = 0\,.$$

(2) Sì, ad esempio $\begin{pmatrix} 0 & -2018 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2018 \end{pmatrix}$.

(3) L'applicazione è lineare perché vale

$$T(B+C) = A(B+C)-(B+C)A = AB+AC-BA-CA = (AB-BA)+(BC-CA) = T(B)+T(C)$$
$$\text{e } T(\lambda B) = A(\lambda B) - (\lambda B)A = \lambda AB - \lambda BA = \lambda(AB-BA) = \lambda T(B)$$

La matrice associata è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e si potrebbe notare immediatamente che $T(I) = 0$ e $T(A) = 0$ (qui I è la matrice identità e 0 è la matrice nulla). Il polinomio caratteristico dà come autovalori 0 (doppio), 3 e -3 (un po' lungo da calcolare):

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

sviluppando secondo Laplace sulla prima riga

$$= (-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (-\lambda)(1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} + 2(-\lambda)\det\begin{pmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$+ 2\det\begin{pmatrix} 1 & -1-\lambda \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -\lambda^2(1-\lambda)(1+\lambda) + 2\lambda(1-\lambda) + 0 - 2\lambda(1+\lambda) - 2\lambda(1+\lambda) + 4 - 4 + 0 + 0 - 4 + 2\lambda(1-\lambda) + 4$$
$$= \lambda^2(\lambda^2-1) + 4\lambda(1-\lambda) - 4\lambda(1+\lambda) = \lambda^2(\lambda^2-1) - 8\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2-9)\,.\ \text{FINE!}$$

Ecco gli autovettori di autovalori rispettivamente 3 e -3:

$$T\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

T non è isomorfismo, infatti il nucleo non è banale: $\ker T = \operatorname{Span}\{I, A\}$. È diagonalizzabile, infatti abbiamo trovato 4 autovettori linearmente indipendenti. Quindi vale

$$\mathscr{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})}) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathscr{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(4) Nota: a causa di uno stupido errore di stampa il testo è divenuto più facile nei calcoli ma con matrici decisamente voluminose che potrebbero aver scoraggiato alcuni studenti.

Secondo le regole del prodotto riga per colonna, deve essere $Y = \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$. Scegliendo le basi canoniche dei due spazi trovo la matrice

$$\mathscr{M}_B^C(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

La riduzione a scala presenta calcoli semplici, nonostante l'enorme mole di numeri (tuttavia 36 su 54 sono zeri e gli altri si ripetono e i calcoli sono decisamente elementari!). Infatti dapprima si possono riordinare le righe così (ma non è obbligatorio):

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove sulle righe si sono fatti i calcoli: $II^a - 3I^a$, $III^a - 5I^a$ e nelle righe successive i calcoli sono un copia-incolla, poi calcolo $III^a - 2II^a$ per ottenere gli zeri. Quindi riordinando vedo meglio i pivot che sono sei.

$$\mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'immagine ha dimensione 6, e *sembra* generata da

$$\mathrm{Im}(S) =?= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

(ovvero le colonne corrispondenti ai pivot) Tuttavia, questi sono elementi di $\mathbb{R}^9$ e non elementi di

$\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ (sono infatti le coordinate di elementi di $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$), la risposta corretta è invece

$$\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right)$$

A questo punto, risolvendo il sistema omogeneto $\mathscr{M}_B^C(S)x = 0$ si trova il nucleo che risulta $\ker S = \{0\}$, (si può anche pervenire alla risposta usando il teorema di Rouché-Capelli o il teorema della dimensione.

(5)

$$\pi : P = P_1 + sv_1 + tv_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \pi : x + 2y - z = 2$$

$$r : P = P_1 + sv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad r : \begin{cases} y + 3x = 5 \\ z + 5x = 8 \end{cases}$$

L'area è data dalla metà dell'area del parallelogramma individuato dai vettori v_1 e v_2. Basta calcolare la norma del prodotto vettoriale dei due

$$Area = \frac{1}{2}\|v_1 \wedge v_2\| = \frac{1}{2}\|(-2, 4, -2)^T\| = \frac{1}{2}2\sqrt{6} = \sqrt{6}\,.$$

In ultimo si chiede l'altezza del triangolo relativa alla base P_1P_2 e si ottiene $S : P = P_3 + sv_3$. Il vettore v_3 deve essere ortogonale a v_1 e ortogonale al vettore ortogonale al piano $v_1 \wedge v_2$ quindi

$$v_3 = v_1 \wedge (v_1 \wedge v_2) = (26, -8, 10)^T\,.$$