Scritto di Geometria

Corso di Ingegneria Civile e Ambientale

A. A. 2014/15 – Prova scritta 03–09–2015

Cognome e Nome: ______________________________ Matricola: ______________

Vietato l'uso di calcolatori, appunti, libri,...

Durata della prova: 3 ore. Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse due ore.
Scrivi in modo ordinato e motiva ogni risposta.
Risolvi il compito sostituendo ad a l'ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$ ________

(1) Dire per quali valori $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ la conica con associata la matrice M passa per il punto $P = (1,1)$

$$M = \begin{pmatrix} -3 & a-4 & 5+k \\ a-4 & 0 & 3h-2 \\ 5+k & 3h-2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Il sindaco di Ancona ha promesso che, per rendere più verde la città, entro il 31 dicembre saranno piantati 100 alberi nei rioni di Posatora, Baraccola, Torrette e Collemarino. In particolare ha promesso che gli alberi piantati a Posatora saranno il doppio della somma degli alberi piantati a Baraccola e Torrette, e che la somma degli alberi piantati a Posatora e Baraccola supererà di $2(a+1)$ la somma degli alberi piantati a Torrette e Collemarino; può il sindaco mantenere la promessa da un punto di vista matematico? Se sì fornire almeno una delle possibili soluzioni.

(3) Detto $C(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dimostrare che l'insieme

$$W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; : \; f(x) = a \sin x + b \cos x \text{ dove } a, b \in \mathbb{R}\}$$

è un sottospazio vettoriale di $C(\mathbb{R})$ e scrivere una base $\mathcal{B}$ di W. Quindi, dell'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to W$ definita da

$$T\big(p(t)\big) = p(a+2) \sin x + p(11-a) \cos x$$

trovare il nucleo di T e la matrice $\mathscr{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T)$ dove $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}_2[t]$.

(4) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix},$$

dire per quali valori di $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ la matrice A risulta diagonalizzabile se

1. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono tutti diversi;
2. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$;
3. $\alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3$.

(5) Calcola il determinante di queste matrici

$$\begin{pmatrix} a+1 & 2 & 7-a & 2 & 3 & a-4 \\ a+1 & 1 & 5-a & -2 & 8-a & 5 \\ 0 & 0 & 4 & a+5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10-a & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & a+5 & 3 & 5 \\ a+1 & 2 & 7-a & 2 & 3 & a-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ a+1 & 1 & 5-a & -2 & 8-a & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10-a & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-4 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione

(1) Basta risolvere il prodotto riga per colonna

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & a-4 & 5+k \\ a-4 & 0 & 3h-2 \\ 5+k & 3h-2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

da cui si ottiene $k+3h+a-2=0$ con soluzone $(k,h)=(a-2-3t,t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

(2) Bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} p+b+t+c=100 \\ p-2b-2t=0 \\ p+b-t-c=2(a+1) \end{cases}$$

con chiaro significato delle incognite. Posto $\alpha=(a+1)$ si trovano le soluzioni

$$\left(\frac{200-2\xi}{3}, \frac{2\xi-50}{3}+\alpha, 50-\alpha-\xi, \xi\right)$$

con $\xi \in \mathbb{R}$. Tuttavia il problema necessita di soluzioni $(p,b,t,c) \in \mathbb{N}^4$. Dobbiamo quindi porre $0 \le \xi \le 50-\alpha$ perchè le ultime due coordinate siano non negative, inoltre dobbiamo chiedere che $2\xi-50$ sia divisibile per 3, ovvero $\xi = 25, 28, 31, ..., 46, 49$. Quindi le possibili risposte sono:

$$\begin{array}{lcll} \xi=25 & \to & \big(50, \alpha, 25-\alpha, 25\big) & \\ \xi=28 & \to & \big(48, 2+\alpha, 22-\alpha, 28\big) & \\ \xi=31 & \to & \big(46, 4+\alpha, 19-\alpha, 31\big) & \\ \xi=34 & \to & \big(44, 6+\alpha, 16-\alpha, 34\big) & \\ \xi=37 & \to & \big(42, 8+\alpha, 13-\alpha, 37\big) & \\ \xi=40 & \to & \big(40, 10+\alpha, 10-\alpha, 40\big) & \\ \xi=43 & \to & \big(38, 12+\alpha, 7-\alpha, 43\big) & \text{se } a \le 6 \\ \xi=46 & \to & \big(36, 14+\alpha, 4-\alpha, 46\big) & \text{se } a \le 3 \\ \xi=49 & \to & \big(34, 16+\alpha, 1-\alpha, 49\big) & \text{se } a = 0 \end{array}$$

(3) Dimostro che è sottospazio. Comunque scelti $v_1, v_2 \in W$ avrò $v_1 = a_1 \sin x + b_1 \cos x$ e $v_2 = a_2 \sin x + b_2 \cos x$, quindi

$$v_1+v_2 = (a_1 \sin x + b_1 \cos x) + (a_2 \sin x + b_2 \cos x) = (a_1+a_2)\sin x + (b_1+b_2)\cos x$$

$$\lambda v_1 = \lambda(a_1 \sin x + b_1 \cos x) = (\lambda a_1)\sin x + (\lambda b_1)\cos x$$

provano che W è sottospazio. La base deve essere costituita da elementi che generano tutto il sottospazio, quindi è saggio prendere come base $\mathcal{B} = \{\sin x, \cos x\}$, infatti esso è definito proprio come insieme delle combinazioni lineari delle funzioni seno e coseno. Si ha quindi

$$\mathscr{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & a+2 & (a+2)^2 \\ 1 & 11-a & (11-a)^2 \end{pmatrix}$$

dove deve essere noto che $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$. L'esercizio poi si risolve ponendo $\alpha = a+2$ e $\beta = 11-a$, quindi usando la riduzione a scala e usando sapientemente la differenza di quadrati $\beta^2-\alpha^2 = (\beta-\alpha)(\beta+\alpha)$, si trova che il nucleo è generato dal polinomio

$$(-\alpha\beta) + (\alpha+\beta)t - t^2 = -(a+2)(11-a) + 13t - t^2$$

che tra l'altro è il polinomio che si annulla contemporaneamente in $\alpha = a+2$ e $\beta = 11-a$. Naturalmente i calcoli con a fissato risultano più semplici.

(4) Il polinomio caratteristico della matrice è facile da calcolare. A questo punto

1. Tre autovalori distinti quindi diagonalizzabile, ne segue che b_1, b_2, b_3 possono avere qualsiasi valore;
2. Un autovalore con molteplicità algebrica 3, quindi la matrice $A - \alpha_1 I$ deve avere rango zero, quindi: $b_1 = b_2 = b_3 = 0$;
3. L'autovalre $\alpha_2 = \alpha_3$ ha molteplicità algebrica 2, quindi la matrice $A - \alpha_2 I$ deve avere rango 1, quindi devo chiedere $b_3 = 0$.

(5) La matrice di sinistra è una matrice a blocchi del tipo $\begin{pmatrix} B_1 & * & * \\ 0 & B_2 & * \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}$ il cui determinante risulta dato dal prodotto $\det B_1 \cdot \det B_2 \cdot \det B_3$ da cui si ottiene. Oppure si può usare la riduzione a scala di Gauss effettuando le operazioni: $2^a r - 1^a r$, $4^a r - 4 \cdot 3^a r$, $6^a r - \frac{3}{a-4} \cdot 5^a r$ che lasciano invariato il determinante.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
det	10	36	72	112	150	180	196	192	162	100

La seconda matrice ha lo stesso determinante perchè ottenuta dalla prima con 4 (numero pari) scambi di righe.