Scritto di Geometria

Corso di Ingegneria Civile e Ambientale

A. A. 2014/15 – Prova scritta 08–01–2015

Cognome e Nome: ______________________________ Matricola: ________________

Vietato l'uso di calcolatori, appunti, libri,...

Durata della prova: 3 ore. Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse due ore.
Scrivi in modo ordinato e motiva ogni risposta.
Risolvi il compito sostituendo ad a l'ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$ __________

(F1) Date le applicazioni lineari $S : V \to W$ e $T : W \to Z$, dove V, W, Z sono tre spazi vettoriali differenti. Cosa posso dire dell'applicazione (lineare?) $T \circ S$, sapendo che $\ker T = \operatorname{Im} S$?

(F2) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{Z}$ il seguente sistema ha soluzioni intere $(x, y, x) \in \mathbb{Z}^3$.

$$\begin{cases} x - y - z = a \\ 4x - 2y - z = k + 1 \\ 2x - y = k + 2\,. \end{cases}$$

(F3) Dire se i seguenti insiemi sono rispettivamente spazi vettoriali sui campi $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}$, e in caso affermativo fornirne una base.
$V_1 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 \;:\; a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 0\}\,,\quad V_2 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \;:\; a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 0\}\,.$

(P1) Risolvere l'esercizio sostituendo al valore x_0 il corrispondente valore indicato in tabella in dipendenza dal valore a:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_0	-10	-3	-2	$-1/2$	$-1/3$	$1/3$	$1/2$	2	3	10

Dimostrare che l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle_X : \mathbb{R}_4[t] \times \mathbb{R}_4[t] \to \mathbb{R}$ definita da $\langle p, q \rangle_X = \dfrac{1}{x_0^4}\, p(x_0)q(x_0)$ é una forma bilineare simmetrica semi-definita positiva e dire chi sono i vettori del nucleo $\mathbb{R}_4[t]^{\perp}$. Scrivere poi la matrice B associata a questa applicazione rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_4[t]$.

(P2) Sia $\Phi : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $\Phi\big(p(t)\big) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(h) \end{pmatrix}$ dove $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$.
Trovare la matrice $A = \mathscr{M}_C^{C'}(\Phi)$ dove C e C' sono rispettivamente le basi canoniche di $\mathbb{R}_2[t]$ e $\mathbb{R}^3$. Dire se la matrice A risulta diagonalizzabile e, in caso affermativo, fornire una matrice diagonale simile alla matrice A.

(P3) Fissato un riferimento cartesiano $RC(O, A_1, A_2, A_3)$, considerare i piani
$\pi_1 : (a - 4)x - 2y + (a - 6)z - a + 8 = 0,$
$\pi_2 : (a - 5)x + (3 - a)y - 2z + a - 1 = 0.$
Trovare equazioni cartesiane e parametriche per la retta intersezione r. Quindi trovare equazioni parametriche e cartesiane per la retta s, passante per il punto $P = (a - 2, 1, 2)$, parallela alla retta di equazione

$$\begin{cases} 2x - (a - 6)y - 4z = 5 - a \\ 3x - 3y - (a - 2)z = a - 4\,. \end{cases}$$

Quindi discutere la posizione reciproca delle due rette e calcolare l'angolo tra le due.

Soluzione:

(F1) Per ogni $v \in V$, $T \circ S(v) = T(w)$ dove $w \in \operatorname{Im} S$, ma poichè $\operatorname{Im} S = \ker T$ vale $T(w) = 0$ e quindi ho trovato che per ogni $v \in V$ vale $T \circ S(v) = 0$, quindi $T \circ S$ è l'applicazione nulla.

(F2) La matrice associata al sistema ha determinante 1, quindi usando il Teorema di Cramer trovo che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ la soluzione del sistema è intera.

(F3) Si verifica che $v_1 = (i, 1, 0, 0)^T \in V_1$ e $v_2 = (1, i, 0, 0)^T \in V_1$ ma $v_1 + v_2 \notin V_1$. Quindi V_1 non è spazio vettoriale. Invece si può mostrare che $V_2 = \{0\}$ infatti il solo elemento di $\mathbb{R}^4$ che soddisfa la condizione richiesta è il vettore nullo. Quindi V_2 è lo spazio vettoriale nullo, che quindi ha come base l'insieme vuoto.

(P1) Bisogna mostrare che

$$\begin{aligned}
\langle p_1 + p_2, q \rangle_X &= \tfrac{1}{x_0^4}\,(p_1 + p_2)(x_0)q(x_0) = \tfrac{1}{x_0^4}\,[p_1(x_0) + p_2(x_0)]q(x_0) = \\
&\tfrac{1}{x_0^4}\,p_1(x_0)q(x_0) + \tfrac{1}{x_0^4}\,p_2(x_0)q(x_0) = \langle p_1, q\rangle_X + \langle p_2, q\rangle_X \\
\langle \lambda p, q \rangle_X &= \tfrac{1}{x_0^4}\,(\lambda p)(x_0)q(x_0) = \tfrac{1}{x_0^4}\,[\lambda \cdot p(x_0)]q(x_0) = \\
&\lambda \cdot \tfrac{1}{x_0^4} p(x_0)q(x_0) = \lambda \,\langle p, q\rangle_X
\end{aligned}$$

e analogamente che $\langle p, q_1 + q_2\rangle_X = \langle p, q_1\rangle_X + \langle p, q_2\rangle_X$ e $\langle p, \lambda q\rangle_X = \lambda\,\langle p, q\rangle_X$. Inoltre

$$\langle p, p\rangle_X = \frac{1}{x_0^4} p^2(x_0) \geq 0$$

I vettori del nucleo sono i polinomi che si annullano in x_0 ovvero quelli del tipo $p(x) = (x - x_0)(a + bx + cx^2 + x + dx^3)$. Ricordando che $B_{ij} = \langle e_j, e_i\rangle_X$ e che la base canonica è formata da $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$, $e_4 = t^3$, $e_5 = t^4$, la matrice associata risulta:

$$B = \begin{pmatrix} 1/x_0^4 & 1/x_0^3 & 1/x_0^2 & 1/x_0 & 1 \\ 1/x_0^3 & 1/x_0^2 & 1/x_0 & 1 & x_0 \\ 1/x_0^2 & 1/x_0 & 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1/x_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 \end{pmatrix}$$

(P2) La matrice associata risulta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & h & h^2 \end{pmatrix}$$

con autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_{2,3} = \dfrac{(h^2+1) \pm \sqrt{(h^2-1)^2 + 4h}}{2}$. Poichè $h > 0$ si vede che $\lambda_2 \neq \lambda_3$, inoltre si può mostrare che entrambi sono diversi da 1:

$$\begin{aligned}
1 &\stackrel{?}{=} \tfrac{(h^2+1) \pm \sqrt{(h^2-1)^2+4h}}{2} \\
2 &\stackrel{?}{=} (h^2 + 1) \pm \sqrt{(h^2-1)^2 + 4h} \\
\mp\sqrt{(h^2-1)^2 + 4h} &\stackrel{?}{=} h^2 - 1
\end{aligned}$$

dove l'ultima identità non vale sicuramente essendo $h > 0$.

(P3) Risoluzione omessa. Verificate che sono sghembe.