Scritto di Geometria

Corso di Ingegneria Civile e Ambientale

A. A. 2014/15 – Prova scritta 29–01–2015

Cognome e Nome: ______________________________ Matricola: ______________

Vietato l'uso di calcolatori, appunti, libri,...

Durata della prova: 3 ore. Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse due ore.
Scrivi in modo ordinato e motiva ogni risposta.
Risolvi il compito sostituendo ad a l'ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$ __________

(F1) **(2⋆)** Due matrici $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tali che $\det(AB) < 0$ possono essere congruenti?

(F2) **(4⋆)** Determina per quali valori di h e k la seguente matrice è diagonalizzabile.

$$M = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ h+2 & k & h^2-a \\ k-6 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$$

(F3) **(2⋆)** Sia $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi. Considera lo spazio vettoriale V sul campo reale $\mathbb{R}$, definito da $V = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Scrivine una base.

(P1) Sia $\mathbb{R}_2[x,y]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 nelle variabili x e y. Una sua base è data dall'insieme $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, y, xy, y^2\}$. Considera quindi l'applicazione lineare $Y_a : \mathbb{R}_2[x,y] \to \mathbb{R}_2[t]$ tale che $Y_a\big(p(x,y)\big) = p(t, a+2)$.
- **(2⋆)** Calcola $Y_a(x^2 + xy + y^2 + 1)$ e $Y_a(x + y - 2)$.
- **(2⋆)** Scrivi la matrice $\mathscr{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Y_a)$, dove $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}_2[t]$.
- **(3⋆)** Determina nucleo e immagine dell'applicazione Y_a.

(P2) Sia data l'applicazione $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$ definita da $T\big(p(t)\big) = \dfrac{1}{t}\,[p(t)(1+t) - p(0)]$.
- **(3⋆)** Dimostra che l'applicazione è ben definita ed è un'applicazione lineare.
- **(4⋆)** Scrivi le matrici $\mathscr{M}^B_B(T)$ e $\mathscr{M}^C_C(T)$ associate all'applicazione T dove le basi sono $B = \{1\,,\, 1+t\,,\, 1+t+t^2\,,\, 1+t+t^2+t^3\}$ e C è la base canonica di $\mathbb{R}_3[t]$.
- **(2⋆)** Studia autovalori e autovettori di T.

(P3) Fissato un riferimento cartesiano $RC(O, A_1, A_2, A_3)$, è data una quadrica, con associata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & -2 \\ a & -2 & 0 & 3-a \\ -1 & 0 & 2a-12 & 5-a \\ -2 & 3-a & 5-a & 3 \end{pmatrix}$$

- **(2⋆)** Trova i piani tangenti π_1, π_2 ad essa nei suoi punti $P_1 = (1,0,0)$ e $P_2 = (1,1,1)$.
- **(4⋆)** A questo punto individua la posizione reciproca dei piani, e se incidenti, detta r la retta comune ai due piani, trova equazioni cartesiane e parametriche per la retta s parallela ad r passante per il punto P_2.

Soluzione:

(F1) Se fossero congruenti, averi $A = P^T AP$ dove P è matrice invertibile, quindi in particolare trovo usando il Teorema di Binet $\det A = \det B(\det P)^2$ e trovo che il determinante deve avere lo stesso segno.

(F2) È facile vedere che il polinomio caratteristico ha per soluzioni $k, a+1, a-5$. Quindi, se $k \neq a+1, a-5$ è sempre diagonalizzabile per ogni h. Se $k = a-5$ devo avere $h = \pm\sqrt{a}$. Se invece $k = a+1$ devo chiedere che h risolva $(h^2 - a)(a-5) + 6(h+2) = 0$ e quindi $(a-5)h^2 + 6h + (12 - a^2 - 5a) = 0$. Se $a = 5$ allora $h = -2$, altrimenti

$$h_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - (a-5)(12 - a^2 + 5a)}}{a-5}.$$

In particolare

a	$k=a-5$	$k=a+1$	*else*
0	$h=0$	$h_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{69}}{5}$	$\forall$
1	$h=\pm1$	$h_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{73}}{4}$	$\forall$
2	$h=\pm\sqrt{2}$	$h_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{63}}{3}$	$\forall$
3	$h=\pm\sqrt{3}$	$h_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{45}}{2}$	$\forall$
4	$h=\pm2$	$h_1 = -2, h_2 = 8$	$\forall$

a	$k=a-5$	$k=a+1$	*else*
5	$h=\pm\sqrt{5}$	$h=-2$	$\forall$
6	$h=\pm\sqrt{6}$	$h_{1,2} = -3\pm\sqrt{3}$	$\forall$
7	$h=\pm\sqrt{7}$	$h_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$	$\forall$
8	$h=\pm2\sqrt{2}$	$h_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{45}}{3}$	$\forall$
9	$h=\pm3$	$h_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{105}}{4}$	$\forall$

(F3) $\mathcal{B} = \{(1,0)^T; (i,0)^T; (0,1)^T; (0,i)^T\}$

(P1) $Y_a(x^2+xy+y^2+1) = t^2+(a+2)t+a^2+2a+2$ e $Y_a(x+y-2) = t+a$ Prendendo $B = \{1, x, x^2, y, xy, y^2\}$ trovo

$$\mathscr{M}_B^B(Y_a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a+2 & 0 & (a+2)^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui trovo che Y_a è suriettiva e $\ker Y_a = Span(q, qx, qy)$ dove $q = y - (a+2)$ (va bene anche ad esempio $y^2 - (a+2)^2$ al posto di qy).

(P2) Ben definita: Se $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ trovo

$$T\big(p(t)\big) = \frac{1}{t}\left[p(t)(1+t) - p(0)\right] = p(t) + \frac{p(t)-p(0)}{t} = (a + bt + ct^2 + dt^3) + (b + ct + dt^2)$$

Linearità:

$$\begin{aligned} T\big((p+q)(t)\big) &= \tfrac{1}{t}\left[(p+q)(t)(1+t) - (p+q)(0)\right] \\ &= \tfrac{1}{t}\left[(p(t)+q(t))(1+t) - (p(0)+q(0))\right] \\ &= \tfrac{1}{t}\left[p(t)(1+t) - p(0)\right] + \tfrac{1}{t}\left[q(t)(1+t) - q(0)\right] \\ &= T\big(p(t)\big) + T\big(q(t)\big) \\ T\big((\lambda p)(t)\big) &= \tfrac{1}{t}\left[(\lambda p)(t)(1+t) - (\lambda p)(0)\right] \\ &= \tfrac{1}{t}\left[\lambda p(t)(1+t) - \lambda p(0)\right] \\ &= \lambda\tfrac{1}{t}\left[p(t)(1+t) - p(0)\right] = \lambda T\big(p(t)\big) \end{aligned}$$

Matrici associate:

$$\mathcal{M}_{B,B}(\mathbb{R})C = \mathcal{M}_{C,C}(\mathbb{R})T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un solo autovalore $\lambda = 1$ con $m_a(1) = 4$, $m_g(1) = 1$ e autovettore il polinomio costante $p \equiv 1$.

(P3)

$$\pi_1 : -x + 3y + (4-a)z + 1 = 0 \quad \pi_2 : (a-2)x + y + (a-8)z + (9-2a) = 0$$

La giacitura di r è data da $v_1 \wedge v_2 = (28-4a, a^2-7a+16, 3a-5)$ dove v_1, v_2 sono i vettori ortogonali a π_2, π_2.