Scritto di Geometria

Corso di Ingegneria Civile e Ambientale

A. A. 2014/15 – Prova scritta 19–02–2015

Cognome e Nome: ____ Matricola: ________________

Vietato l'uso di calcolatori, appunti, libri,...

Durata della prova: 3 ore. Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse due ore.
Scrivi in modo ordinato e motiva ogni risposta.
Risolvi il compito sostituendo ad a l'ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$ ___________

(F1) **(3⋆)** Una matrice $A \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$ ha autovalori $\lambda_1 = k - a + 2$; $\lambda_2 = 5 + k$; $\lambda_3 = e^k - \sqrt{2a+3}$ e $\lambda_4 = k\pi - \sqrt{3(a+1)}$. Dire, se esistono, per quali valori di k la matrice non é invertibile.

(F2) **(4⋆)** Calcola il determinante della seguente matrice e, se esiste, la sua inversa:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(P3) **(4⋆)** Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione rispettivamente m ed n, siano $T : V \to W$ e $S : W \to V$ applicazioni lineari, di cui la prima è suriettiva e tali che $\ker T = \operatorname{Im} S$. Dire per quali valori di m ed n questa situazione può realizzarsi. Dire se è sempre possibile calcolare la dimensione di $\ker S$ e fornirne una stima. (Suggerimento: utilizzare il teorema della dimensione)

(P3') **(2⋆)** Qualora non si sappia risolvere l'esercizio precedente per m ed n generici, porre $m = 8a$ ed $n = 5a$.

(P4) **(5⋆)** Considerata l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_2[t] \times \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}$ tale che

$$\langle p, q \rangle = p(a)q(a) + p(a-5)q(a-5) + p(a-9)q(a-9)$$

dimostrare che si tratta di un prodotto scalare (forma bilineare simmetrica definita positiva).

(P5) **(8⋆)** Sia $\Psi : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$\Psi\big(p(t)\big) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(-9) \\ p(-6) \end{pmatrix}$$

• Trovare la matrice $A = \mathscr{M}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}(\Psi)$ dove $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ sono rispettivamente le basi canoniche di $\mathbb{R}_2[t]$ e $\mathbb{R}^3$.
• Dire se questa applicazione invertibile.
• Dire se A risulta diagonalizzabile e, in caso affermativo, definita l'applicazione $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $L_A(v) = Av$, determinare una base B di autovettori di L_A e la relativa matrice diagonale $\mathscr{M}_B^B(L_A)$.
• Scrivere la matrice di cambio base dalla base canonica C di $\mathbb{R}^3$ alla base B, ovvero $\mathscr{M}_B^C(id_{\mathbb{R}^3})$.

(P6) **(6⋆)** Fissato un riferimento cartesiano $RC(O, A_1, A_2, A_3)$,
• scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per i punti $P_1 = (a+4, 1, a+5)$ e $P_2 = (3, 0, a+5)$.
• Dato il piano $\pi : y - 3z + 10 = 0$ sia $\tilde{r}$ la proiezione ortogonale della retta r sul piano π, trovare equazioni parametriche della retta s contenuta in π, passante per il punto $P_3 = (5, 5, ?)$ e ortogonale alla retta $\tilde{r}$.

Soluzioni:

(P1) Basta chiedere che nessuno degli autovalori sia nullo, ovvero

$$k \notin \{a-2, -5, \frac{1}{2}\ln(2a+3), \sqrt{3a+3}/\pi\}$$

(P2) Usando la riduzione di Gauss si risolve facilmente l'esercizio. La risoluzione con il metodo di Laplace per il calcolo del determinante e il metodo dei cofattori per l'inversa fa perdere tantissimo tempo.

$$\det M = 1 \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(P3) Trovo $\dim\ker S = 2n - m$. Restrizioni: $m \geq n$ per la suriettivit di T e $2n \geq m$ per poter affermare che $\ker T = \operatorname{Im} S$.

(P4) La dimostrazione della bilinearità è pressocché identica all'esercizio (P1) dell'8 gennaio 2015, ad eccezione del fatto che $\langle p, p\rangle = p^2(a) + p^2(a-5) + p^2(a-9) \geq 0$ e per mostrare che è definita positiva ragiono nel modo seguente: suppongo di avere p polinomio tale che $\langle p, p\rangle = 0$ allora, devo avere $p(a) = p(a-5) = p(a-9) = 0$, quindi ho che p è un polinomio di grado ≤ 2 che si annulla in 3 punti. Allora p è necessariamente il polinomio nullo.

(P5)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -9 & 81 \\ 1 & -6 & 36 \end{pmatrix}$$

con tre autovalori: $1, 9, 18$ (quindi invertibile) e autovettori associati nell'ordine $v_1 = (68, 23, 2)$, $v_2 = (0, 9, 2)$ e $v_3 = (0, 3, 1)$.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \qquad \mathscr{M}_B^C(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 68 & 23 & 2 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(P6) $r : (3, 0, a+5) + t(a+1, 1, 0)$ e $r : \begin{cases} x - (a+1)y - 3 = 0 \\ z = a + 5\,. \end{cases}$

Quindi $\tilde{r}$ ha come giacitura

$$v = (a+1, 1, 0) - \underbrace{\frac{\langle (a+1,1,0), (0,1,-3)\rangle}{10}(0,1,-3)}_{proiezione\ sulla\ normale\ al\ piano\ \pi} = (a+1, \frac{9}{10}, -\frac{3}{10})$$

e trovo che $P_3 = (5, 5, 5)$ e la giacitura di s con $v \times (0, 1, -3) = (-\frac{24}{10}, 3(a+1), a+1)$