

PRECORSO

Milena Petrini

Università Politecnica delle Marche

- Elementi di logica: proposizioni e operazioni tra proposizioni
- Richiami di insiemistica: insiemi e operazioni tra insiemi
- Numeri reali, retta reale e valore assoluto, piano cartesiano
- Relazioni e funzioni: relazioni d'ordine e di equivalenza, funzioni reali, operazioni tra funzioni
- Elementi di geometria analitica: retta, circonferenza, ellisse, parabola e iperbole
- Funzioni elementari
 - Potenze, equazioni e disequazioni algebriche intere e fratte, irrazionali
 - Esponenziali e logaritmi, equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche
 - Funzioni trigonometriche, equazioni e disequazioni trigonometriche

TESTI CONSIGLIATI

- "MATEMATICA ZERO", F. Alessio, C. de Fabritiis, C. Marcelli e P. Montecchiari, Pearson
- "GEOMETRIA ANALITICA CON ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE, II ED.", M. Abate e C. de Fabritiis, McGraw-Hill

- ① ELEMENTI di LOGICA
- ② RICHIAMI di INSIEMISTICA
- ③ RELAZIONI e FUNZIONI
- ④ NUMERI REALI
- ⑤ ELEMENTI di GEOMETRIA ANALITICA
- ⑥ FUNZIONI REALI
- ⑦ FUNZIONI ELEMENTARI
 - POTENZE
 - ESPONENZIALI e LOGARITMI
 - FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

La logica elementare si occupa di stabilire la verità di affermazioni complesse a partire dalla verità di quelle più semplici che le compongono. Si parla in questo caso di **proposizioni** o **enunciati**: sono affermazioni per le quali è possibile stabilire un valore di verità, **vero** o **falso**, con un giudizio oggettivo.

- ▶ “3 è un numero dispari” è una proposizione (vera)
- ▶ “ $2 > 4$ ” è una proposizione (falsa)
- ▶ “50 è molto più grande di 2” non è una proposizione
- ▶ “2 è un numero positivo e non è dispari” è una proposizione (vera)

L’ultima proposizione è una proposizione **composta**: è costituita da due proposizioni **semplici**, “2 è un numero positivo” e “2 non è un numero dispari” unite mediante la *coniunzione* “e”.

La proposizione “2 non è un numero dispari” è la *negazione* della proposizione “2 è un numero dispari”.

Data una proposizione \mathcal{P} possiamo considerare la sua **negazione**, che denoteremo con $\neg\mathcal{P}$, ovvero la proposizione che è vera quando \mathcal{P} è falsa, è falsa quando \mathcal{P} è vera

\mathcal{P}	$\neg\mathcal{P}$
V	F
F	V

- ▶ la negazione di “2 è un numero dispari” (falsa) è “2 **non** è un numero dispari” (vera)
- ▶ la negazione di “ogni numero maggiore di 3 è positivo” (vera) è “esiste un numero maggiore di 3 che **non** è positivo” (falsa)

Possiamo facilmente vedere che *la negazione della negazione di una proposizione \mathcal{P} , $\neg(\neg\mathcal{P})$, ha lo stesso valore di verità di \mathcal{P}* , ovvero vale la **legge della doppia negazione** $\neg(\neg\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

La negazione di una proposizione richiede particolare attenzione se contiene un **quantificatore universale** (“per ogni”, “qualunque”) o **esistenziale** (“esiste”, “c’è”).

Abbiamo che

*la negazione di un esistenziale è un universale
la negazione di un universale è un esistenziale.*

- ▶ la negazione di “ogni (qualsiasi) bambino è allegro” è “esiste (c’è, almeno) un bambino non allegro”
- ▶ la negazione di “almeno un giorno al mese vado al cinema” è “ogni giorno del mese non vado al cinema”

In matematica per indicare i quantificatori si usano i simboli

\forall , si legge “per ogni”, “qualunque”, “qualsiasi”, è un quantificatore universale;

\exists , si legge “esiste”, “c’è”, è un quantificatore esistenziale.

La **coniunzione** di due proposizioni \mathcal{P} e \mathcal{Q} è la proposizione, che si denota con $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, che è vera quando \mathcal{P} e \mathcal{Q} sono **entrambe** vere ed è falsa negli altri casi

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La proposizione $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ è la proposizione composta che si ottiene collegando le due proposizioni \mathcal{P} e \mathcal{Q} nel linguaggio corrente con la congiunzione "e"

- ▶ La proposizione "4 è un numero positivo e pari" può essere riscritta come $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ dove \mathcal{P} è la proposizione "4 è un numero positivo" e \mathcal{Q} la proposizione "4 è un numero pari"
- ▶ Se \mathcal{P} è la proposizione "4 è un numero intero maggiore di 2" e \mathcal{Q} è la proposizione "4 è un numero intero minore di 6", la proposizione $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ è "4 è un numero intero maggiore di 2 e minore di 6"

La **disgiunzione** di due proposizioni \mathcal{P} e \mathcal{Q} è la proposizione, denotata con $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, che è vera quando **almeno una** delle due proposizioni è vera, è falsa se le due proposizioni sono entrambe false

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La proposizione $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ è la proposizione che si ottiene nel linguaggio corrente collegando le due proposizioni \mathcal{P} e \mathcal{Q} con “o”, “**oppure**”

- ▶ La proposizione “4 è un numero primo **oppure** pari” (vera) può essere riscritta come $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ dove si è denotata con \mathcal{P} la proposizione “4 è un numero primo” (falso) e con \mathcal{Q} la proposizione “4 è un numero pari” (vero)
- ▶ Se \mathcal{P} è la proposizione “10 è divisibile per 3” (falsa) e \mathcal{Q} è la proposizione “10 è maggiore di 6” (vera), la proposizione $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ è la proposizione “10 è divisibile per 3 **oppure** è maggiore di 6” (vera).

I connettivi \wedge e \vee sono operazioni *commutative*, *associative* e *distributive* l'una rispetto all'altra.

Rispetto all'operazione di negazione valgono le **leggi di De Morgan**:

■ $\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) = (\neg\mathcal{P}) \vee (\neg\mathcal{Q})$

■ $\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = (\neg\mathcal{P}) \wedge (\neg\mathcal{Q})$

Abbiamo ad esempio

- ▶ La negazione di “2 è un numero positivo **e** minore di 3” è “2 è un numero non positivo **oppure** non minore di 3”
- ▶ La negazione di “ x è un numero negativo **oppure** è un numero primo” è “ x è un numero non negativo **e** non è un numero primo”

NOTA: l'ultima proposizione (e la sua negazione) contiene un'incognita, un'indeterminata, si parla più propriamente in questo caso di *predicato*, in cui il valore di verità dipende dal valore assegnato all'incognita.

Date due proposizioni \mathcal{P} e \mathcal{Q} , l'**implicazione** da \mathcal{P} a \mathcal{Q} , che si denota con $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ e si legge “ \mathcal{P} implica \mathcal{Q} ”, è la proposizione che è falsa se \mathcal{P} è vera e \mathcal{Q} è falsa, mentre è vera in tutti gli altri casi

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- ▶ La proposizione “se piove allora le strade sono bagnate” si può riscrivere come $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ dove \mathcal{P} è la proposizione “piove” e \mathcal{Q} “le strade sono bagnate”.

Osserviamo che se \mathcal{P} è falsa, l'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera sia nel caso che \mathcal{Q} sia vera che falsa: se non piove l'implicazione nell'esempio è vera sia che le strade siano bagnate che non lo siano.

L'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ ha lo stesso valore di verità (è *equivalente*) dell'implicazione $\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$, detta **contronominale**:

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\neg\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{Q}$	$\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

- ▶ L'implicazione “se piove allora le strade sono bagnate” è equivalente alla proposizione contronominale “se le strade **non** sono bagnate allora **non** piove”.

NOTA: se è vera l'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ non è detto che sia vera $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$: se le strade sono bagnate non possiamo concludere che piove!!

Nel caso in cui valgano sia l'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ che $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$, si usa scrivere $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ (e si legge “ \mathcal{P} se e solo se \mathcal{Q} ”):

$$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q} \text{ significa } \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \wedge \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$$

La tavola di verità

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

mostra che la **doppia implicazione** $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ è vera solo nel caso in cui le due proposizioni \mathcal{P} e \mathcal{Q} hanno stesso valore di verità, sono entrambe vere o entrambe sono false, sono **equivalenti**.

- ▶ “vieni promosso se e solo se hai un voto maggiore o uguale a 6 in ogni materia” esprime una doppia implicazione, un'equivalenza;
- ▶ “ x è maggiore di 3” è equivalente a “ $x - 3$ è maggiore di 0”, tra le due affermazioni intercorre la doppia implicazione.

Molti risultati in matematica sono delle implicazioni logiche della forma $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ e si esprimono in forme linguistiche diverse:

- “Se vale l’**ipotesi** \mathcal{P} allora vale la **tesi** \mathcal{Q} ”;
- “**Condizione sufficiente** affinché sia vera \mathcal{Q} è che sia vera \mathcal{P} ”;
- “**Condizione necessaria** affinché sia vera \mathcal{P} è che sia vera \mathcal{Q} ”.

Altri risultati sono delle equivalenze logiche, $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, che si possono esprimere come

- “Vale \mathcal{P} **se e solo se** vale \mathcal{Q} ”;
- “**Condizione necessaria e sufficiente** affinché sia vera \mathcal{Q} è che sia vera \mathcal{P} ”.

RICHIAMI di INSIEMISTICA

Il concetto di **insieme** in Matematica viene considerato *primitivo* cioè *noto* e *non definibile* nei termini di concetti più elementari.

Un insieme è costituito dai suoi **elementi**. Scriveremo

$x \in A$ per indicare che x **appartiene** ad A , cioè che x è un elemento dell'insieme A ,

$x \notin A$ per indicare che x **non appartiene** ad A .

L'insieme privo di elementi viene detto **insieme vuoto** e lo si indica con il simbolo \emptyset .

Un insieme può essere descritto in diversi modi, i più usati sono per **elencazione**, cioè elencando i suoi elementi tra parentesi graffe, oppure attraverso una **proprietà** che caratterizza i suoi elementi.

Ad esempio, l'insieme A dei numeri naturali pari minori di 10 può essere descritto

- ▶ per elencazione: $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$;
- ▶ mediante la proprietà che li caratterizza:
 $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10, n \text{ è divisibile per } 2\}$ o anche
 $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10, \exists m \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = 2m\}$.

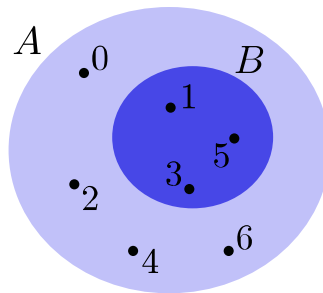
Dati due insiemi A e B diremo che B è **sottoinsieme** di A (o anche che B è **incluso** o **contenuto** in A) quando ogni elemento di B è anche elemento di A , scriveremo $B \subseteq A$.

Se due insiemi A e B sono uno sottoinsieme dell'altro, cioè se $B \subseteq A$ e $A \subseteq B$, allora A e B sono **uguali** e si scrive $A = B$. Si indica che A è **diverso** da B scrivendo invece $A \neq B$.

Se $B \subseteq A$ e $B \neq A$ diremo che B è un **sottoinsieme proprio** di A e scriveremo $B \subset A$.

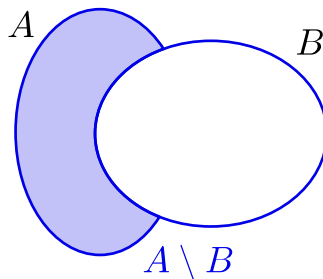
- L'insieme B dei numeri naturali dispari minori di 7 è un sottoinsieme proprio dell'insieme A dei numeri naturali minori di 7:

$$B = \{1; 3; 5\} \subset A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$



Dati due insiemi A e B la **differenza** tra gli insiemi A e B , denotato con $A \setminus B$, è l'insieme costituito dagli elementi di A che non siano anche elementi di B :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



L'insieme $A \setminus B$ è detto anche **complementare** di B in A .

- ▶ Se $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2\}$ allora

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 2\}.$$

- ▶ Se A è l'insieme delle lettere della parola "babbo" e B l'insieme delle vocali allora

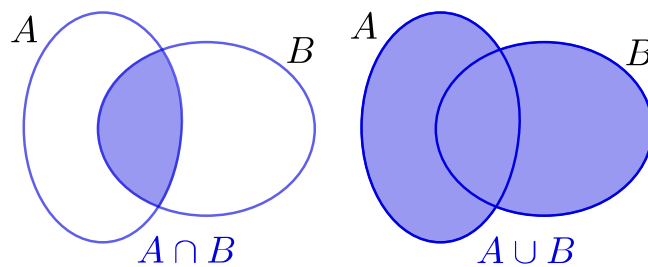
$$A \setminus B = \{b\} \quad \text{e} \quad B \setminus A = \{e; i; u\}.$$

Dati due insiemi A e B , si dice **intersezione** degli insiemi A e B l'insieme denotato con $A \cap B$ costituito dagli elementi in comune tra A e B

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

L'insieme costituito dalla globalità degli elementi di A e B viene detto **unione** degli insiemi A e B e denotato con $A \cup B$:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$



► Se $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2\}$ allora

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 4\} \quad \text{e} \quad A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 1\}.$$

Se $A \cap B = \emptyset$ si dice che A e B sono insiemi **disgiunti**.

Le operazioni di unione e intersezione sono *commutative*, *associative* e *distributive* l'una rispetto all'altra.

Inoltre considerato un *insieme universo* X , per ogni $A \subseteq X$ denotiamo con $\complement A$ il complementare di A in X . Valgono allora le proprietà

- $\complement(\complement A) = A$
- se $A \subset B$ allora $\complement B \subset \complement A$
- $A \cap \complement A = \emptyset$ e $A \cup \complement A = X$

e le **leggi di De Morgan**

- $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B.$

C'è un'analogia tra le operazioni tra insiemi e quelle tra proposizioni:

- alla negazione corrisponde il passaggio al complementare,
- alla congiunzione corrisponde l'intersezione,
- alla disgiunzione corrisponde l'unione,
- all'inclusione corrisponde l'implicazione.

Si definisce **prodotto cartesiano** di due insiemi A e B , e si indica con $A \times B$, l'insieme costituito dalle coppie ordinate (a, b) , ove a appartiene ad A e b appartiene a B :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

- ▶ Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{\alpha, \beta\}$ allora $A \times B = \{(1, \alpha), (2, \alpha), (1, \beta), (2, \beta)\}$.
- ▶ Se $A = \{a\}$ e $B = \{b, c\}$ allora $A \times B = \{(a, b), (a, c)\}$ mentre $B \times A = \{(b, a), (c, a)\}$.

NOTA: $A \times B$ è in generale diverso da $B \times A$, il prodotto cartesiano non è *commutativo*.

Valgono invece le proprietà

■ **associativa** $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

■ **distributiva**

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$

Dati due insiemi A e B si dice **relazione** tra A e B una *legge che associa elementi di A ad elementi di B* .

L'insieme A è detto **dominio** e l'insieme B **codominio** della relazione.

Se \mathcal{R} una relazione tra A e B , per indicare che $a \in A$ è in relazione con un elemento b in B scriveremo $a \mathcal{R} b$.

- ▶ Se A è l'insieme delle auto immatricolate in Italia e B l'insieme delle persone di sesso femminile di cittadinanza italiana, la legge che associa $a \in A$ a $b \in B$ qualora “ a sia l'auto di proprietà di b ” è una relazione tra A e B .

Si dice **relazione binaria** su A una relazione avente come dominio e codominio lo stesso insieme A .

Tra le relazioni binarie, di particolare importanza risultano essere quelle di *equivalenza* e quelle *d'ordine*.

RELAZIONI di EQUIVALENZA

Una relazione binaria \mathcal{R} su un insieme A si dice **relazione di equivalenza** se verifica le proprietà:

- **riflessiva** $a \mathcal{R} a$ per ogni $a \in A$
- **simmetrica** se $a \mathcal{R} b$ allora $b \mathcal{R} a$
- **transitiva** se $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} c$ allora $a \mathcal{R} c$.

Ad esempio sono relazioni di equivalenza

- ▶ la relazione di similitudine nell'insieme dei triangoli: due triangoli sono in relazione tra loro se sono simili;Il
- ▶ la relazione di parallelismo tra rette nel piano: due rette del piano sono in relazione se parallele.

RELAZIONI d'ORDINE

Una relazione binaria \mathcal{R} su un insieme A si dice **relazione d'ordine** su A se verifica le proprietà:

- **riflessiva** $a \mathcal{R} a$ per ogni $a \in A$
- **antisimmetrica** se $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} a$ allora $a = b$
- **transitiva** se $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} c$ allora $a \mathcal{R} c$

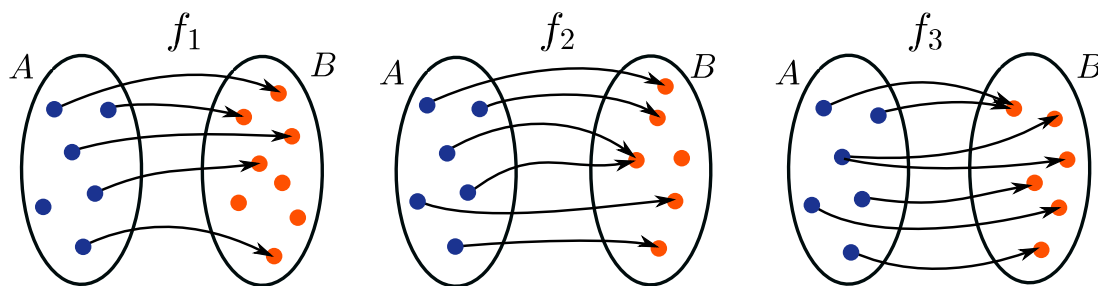
Una relazione d'ordine \mathcal{R} su A si dice **totale** se verifica inoltre la proprietà:

- **dicotomia** se $a, b \in A$ allora $a \mathcal{R} b$ oppure $b \mathcal{R} a$

- ▶ La relazione di inclusione è una *relazione d'ordine* nell'insieme \mathcal{T} dei triangoli nel piano, non è però *totale* visto che, per esempio, due triangoli disgiunti non risultano confrontabili.
- ▶ Un esempio importante di insieme *totalmente ordinato* è dato dalla *retta orientata*. Dati due punti P e Q su una retta orientata, diciamo che P *precede* Q , e scriviamo $P \preceq Q$, se $P = Q$ oppure se $P \neq Q$ e percorrendo la retta da P a Q seguiamo l'orientamento della retta. Tale relazione è una relazione d'ordine totale.

Dati due insiemi A e B , una **funzione** (o **applicazione**) da A in B è una *relazione* che associa a **ciascun** elemento di A **uno ed un solo elemento** di B . Gli insiemi A e B prendono ancora il nome di **dominio** e **codominio**.

Ad esempio consideriamo le relazioni tra A e B rappresentate in figura



Solo la relazione f_2 è una funzione da A in B , dato che **da ogni punto del dominio parte una ed una sola freccia**.

La relazione f_1 non è una funzione perchè sono presenti elementi in A non associati ad alcun elemento di B .

La relazione f_3 non è una funzione perchè vi è un elemento di A associato a più elementi di B .

Per indicare una funzione f da A in B scriveremo $f : A \rightarrow B$.

Scriveremo $f(a) = b$ per indicare che la funzione f associa all'elemento $a \in A$ l'elemento $b \in B$, diremo anche che b è **immagine di a** tramite f .

L'insieme degli elementi di B che sono immagine tramite f di elementi di A viene detto **immagine di f** e denotato con $f(A)$ o $\text{Im}(f)$:

$$\text{Im}(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

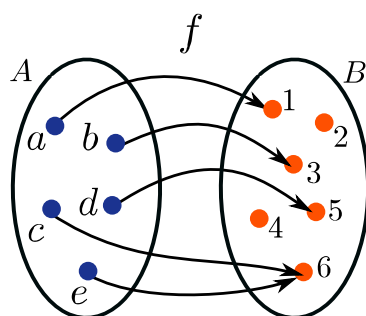
Più in generale, dato un sottoinsieme C del dominio A , si dice **immagine di C** tramite f , l'insieme

$$f(C) = \{b \in B \mid \exists a \in C \text{ tale che } f(a) = b\}$$

Considerato invece un sottoinsieme D del codominio B , si dice **controimmagine di D** l'insieme

$$f^{-1}(D) = \{a \in A \mid f(a) \in D\}$$

- Considerata la funzione $f : A \rightarrow B$ rappresentata in figura

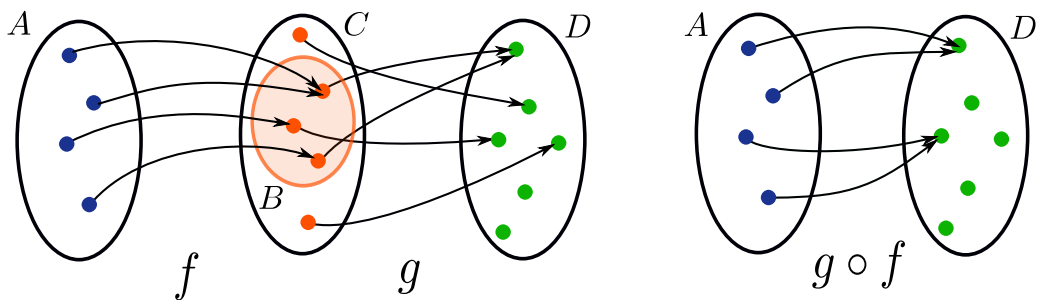


abbiamo che $\text{Im}(f) = f(A) = \{1; 3; 5; 6\}$, $f(\{a; b; c\}) = \{1; 3; 6\}$,
 $f^{-1}(\{1; 2; 3\}) = \{a; b\}$.

- Per la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da $f(n) = 2n + 1$, abbiamo che $\text{Im}(f) = f(\mathbb{N}) = \{1; 3; 5; 7; \dots\}$ è costituito dai numeri naturali dispari, $f(\{1; 4\}) = \{3; 9\}$, $f^{-1}(\{5; 6\}) = \{2\}$.
- La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ ha per immagine l'intervallo $[0, +\infty)$, infatti per ogni $y \geq 0$ esiste $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.

Date due funzioni $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$, se $B \subseteq C$, risulta definita la **funzione composta** $g \circ f : A \rightarrow D$ che associa ad ogni $x \in A$ l'elemento

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Diremo che $g \circ f$ è la **composizione** della funzione g con la funzione f .

- Siano $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(y) = y - 3$, abbiamo che

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 3$$

mentre

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y - 3) = \sqrt{y - 3}.$$

Osserviamo che il dominio di $g \circ f$ è \mathbb{N} , dato che $f(n) \in \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, mentre quello di $f \circ g$ è

$$\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) = y - 3 \in \text{Dom}(f) = \mathbb{N}\} = \{3; 4; 5; \dots\}.$$

NOTA: in generale $g \circ f \neq f \circ g$

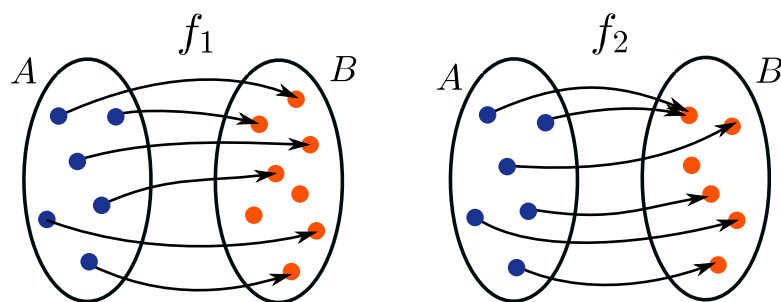
Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice **iniettiva** se associa a elementi distinti di A elementi distinti di B . In altre parole $f : A \rightarrow B$ è iniettiva se

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ si ha } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o, equivalentemente, se

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ si ha } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ad esempio consideriamo le funzioni tra A e B rappresentate in figura



Abbiamo che f_1 è iniettiva, manda elementi diversi in elementi diversi, mentre f_2 non lo è, esistono elementi del codominio che corrispondono allo stesso elemento del dominio.

NOTA: una funzione $f : A \rightarrow B$ **non** è iniettiva se $\exists x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$ per i quali $f(x_1) = f(x_2)$

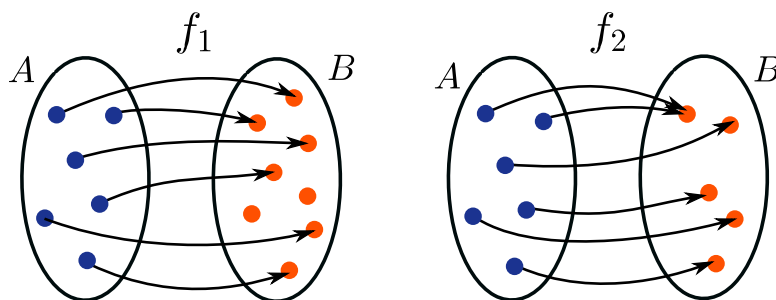
Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice **suriettiva** se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A , cioè se

$$\forall b \in B \exists a \in A \text{ tale che } b = f(a)$$

o, equivalentemente, se la sua immagine coincide con il codominio

$$f(A) = B$$

Consideriamo ad esempio le funzioni rappresentate in figura



La funzione f_1 non è suriettiva, esiste un elemento del codominio che non corrisponde ad alcun elemento del dominio, mentre f_2 lo è, ogni elemento del codominio corrisponde ad almeno un elemento del dominio.

NOTA: una funzione $f : A \rightarrow B$ **non** è suriettiva se $\exists b \in B$ tale che $\forall a \in A$ risulta $b \neq f(a)$

Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice **bijettiva** o **invertibile** se risulta iniettiva e suriettiva. Una funzione è quindi bijettiva se

$$\forall b \in B \text{ esiste ed è unico } a \in A \text{ tale che } f(a) = b$$

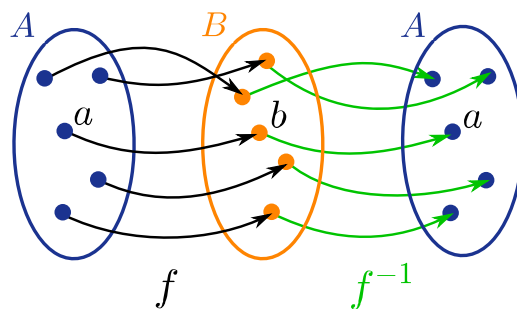
La legge che associa a ogni $b \in B$ l'unico $a \in A$ tale che $f(a) = b$ definisce allora una funzione, detta **funzione inversa** di f e denotata con $f^{-1} : B \rightarrow A$:

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow b = f(a)$$

Abbiamo che

- $\text{Dom}(f^{-1}) = B = \text{Im}(f)$ e $\text{Im}(f^{-1}) = A = \text{Dom}(f)$
- valgono le **leggi di cancellazione**:

$$f^{-1}(f(a)) = a, \forall a \in A \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(b)) = b, \forall b \in B$$



- La funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definita da $f(n) = n + 1$ è iniettiva

$$n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) = n_1 + 1 \neq n_2 + 1 = f(n_2)$$

È suriettiva

$$\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \exists m - 1 \in \mathbb{N} \text{ tale che } f(m - 1) = (m - 1) + 1 = m$$

La funzione è quindi bigettiva, la sua funzione inversa è la funzione $f^{-1} : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da $f^{-1}(m) = m - 1$;

- La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 3x + 2$ è iniettiva e suriettiva, risulta quindi invertibile. Abbiamo che, dato $y \in \mathbb{R}$ e posto $x_y = \frac{y-2}{3}$, si ha $f(x_y) = y$. Dunque $f^{-1}(y) = x_y = \frac{y-2}{3}$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.

NOTA: se $f : A \rightarrow B$ è iniettiva, allora restringendo il codominio all'immagine $f(A)$, possiamo dire che $f : A \rightarrow f(A)$ è iniettiva e suriettiva, quindi è invertibile ed è definita la funzione inversa $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$. Si dice che se $f : A \rightarrow B$ è iniettiva allora f è **invertibile sulla sua immagine**.

- ▶ La funzione $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1 + x^2$ è iniettiva, poichè se $x_1 \neq x_2 \in [0, +\infty)$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$. Non risulta però suriettiva dato che

$$\text{Im}(f) = f([0, +\infty)) = [1, +\infty) \neq \mathbb{R}$$

Risulta però suriettiva se restringiamo il codominio all'immagine $[1, +\infty)$: $f : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ è iniettiva e suriettiva, la sua inversa è la funzione $f^{-1} : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definita da $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 1}$.

I numeri reali possono essere definiti in modo assiomatico nel seguente modo: postuliamo che esista un insieme, l'**insieme dei numeri reali** \mathbb{R} , dove siano definite le due operazioni di somma e prodotto e la relazione minore o uguale soddisfacenti a delle stabilite proprietà, gli *assiomi*. Possiamo distinguere gli assiomi dei numeri reali in tre categorie

- (A) **assiomi algebrici**
- (B) **assiomi d'ordine**
- (C) **assioma di completezza**

ASSIOMI ALGEBRICI

Sono definite in \mathbb{R} due operazioni binarie interne, **somma**, $a + b$ e **prodotto**, $a \cdot b$, soddisfacenti le seguenti proprietà:

A.1 Proprietà commutativa di somma e prodotto:

$$a + b = b + a \quad e \quad a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

A.2 Proprietà associativa di somma e prodotto:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad e \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

A.3 Proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + b \cdot c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

A.4 Esistenza dell'elemento neutro della somma o **zero**: esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

A.5 Esistenza dell'elemento neutro del prodotto o **uno**: esiste $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

A.6 Esistenza dell'**opposto**: per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste $-a \in \mathbb{R}$ tale che $a + (-a) = 0$.

A.7 Esistenza del **reciproco**: per ogni $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ esiste $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ tale che $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

ASSIOMI D'ORDINE

È definita in \mathbb{R} una *relazione d'ordine totale* tra coppie di numeri reali, denotata con \leq e detta **minore o uguale**, quindi soddisfacente le proprietà:

B.1 **Proprietà riflessiva:** per ogni $a \in \mathbb{R}$ risulta $a \leq a$.

B.2 **Proprietà antisimmetrica:** se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$.

B.3 **Proprietà transitiva:** se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$.

B.4 **Proprietà di dicotomia:** per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$.

Infine si chiede che rispetto alle operazioni algebriche siano verificate

B.5 se $a \leq b$ e $c \in \mathbb{R}$ allora $a + c \leq b + c$

B.6 se $a \leq b$ e $0 \leq c$ allora $a \cdot c \leq b \cdot c$.

ASSIOMA DI COMPLETEZZA

C per ogni coppia di insiemi non vuoti $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$ esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e } b \in B.$$

Il numero reale c è detto **elemento separatore** degli insiemi A e B .

Ad esempio, la radice quadrata di 2 può essere definita come l'unico *elemento separatore* degli insiemi

$$A = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0, a^2 < 2\} \quad \text{e} \quad B = \{b \in \mathbb{R} \mid b > 0, b^2 > 2\}.$$

Abbiamo infatti che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$. Dunque, per l'assioma di completezza, avremo che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$. Si può provare che

- c è positivo;
- c verifica $c^2 = 2$;
- c è l'unico elemento separatore degli insiemi A e B .

Ne segue allora che *esiste un unico numero reale positivo c tale che $c^2 = 2$* , tale numero viene detto **radice quadrata di 2** e denotato con $\sqrt{2}$.

A partire dagli assiomi algebrici possiamo definire gli insiemi dei numeri naturali, interi e razionali nel seguente modo

- l'insieme dei **numeri naturali** \mathbb{N} è l'insieme dei numeri naturali ottenuti aggiungendo 1 a 0 e ai *successivi*: $1 = 0 + 1$, $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1, \dots$;
- l'insieme dei **numeri interi** \mathbb{Z} è l'insieme costituito da tutti i numeri naturali e dagli opposti dei numeri naturali;
- l'insieme dei **numeri razionali** \mathbb{Q} è l'insieme dei numeri della forma $\frac{n}{m}$ dove $m, n \in \mathbb{Z}$ e m è non nullo, dove si considerano identificati numeri della forma $\frac{m}{n}$ e $\frac{mp}{np}$ con $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Chiaramente valgono le inclusioni

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Abbiamo che $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ ovvero che l'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dei **numeri irrazionali** è non vuoto. Risulta difatti che $\sqrt{2}$, e più in generale \sqrt{p} con p *numero primo*, non è un numero razionale.

TEOREMA. $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

DIM. Posto $c = \sqrt{2}$, abbiamo per definizione che $c > 0$ e che $c^2 = 2$.
Procediamo *per assurdo* e supponiamo che $c \in \mathbb{Q}$.

Per definizione di numero razionale siano $m, n \in \mathbb{Z}$, tali che $c = \frac{m}{n}$.
Semplificando gli eventuali fattori comuni, potremo scegliere m, n primi tra loro, in particolare non entrambi pari. Allora

$$c^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 = 2n^2 \quad (*)$$

Essendo $2n^2$ numero pari, si ottiene che m^2 è pari e quindi che anche m è pari. Sia allora $h \in \mathbb{Z}$ tale che $m = 2h$. Da (*) si ottiene allora

$$m^2 = (2h)^2 = 2n^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 = 2h^2$$

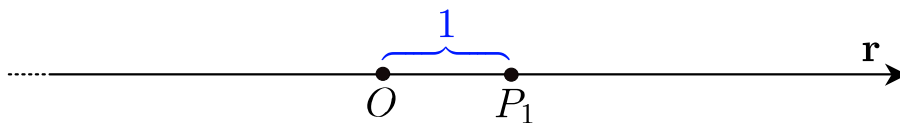
da cui, come sopra, si deduce che n^2 è pari e quindi che anche n è pari, in *contraddizione* con la scelta di m, n non entrambi pari. \square

NOTA: in particolare segue che \mathbb{Q} non verifica l'assioma di completezza.

RETTA REALE

Una **retta reale** è una retta \mathbf{r} su cui è stato fissato

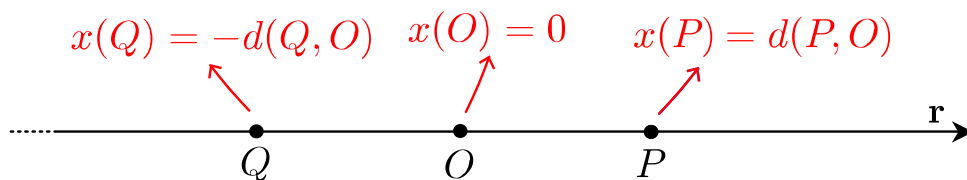
- un punto O , detto **origine**,
- un'**orientazione** (o verso di percorrenza)
- un'**unità di misura**, ovvero un punto P_1 che individua insieme all'origine un segmento di lunghezza unitaria.



Grazie all'assioma di completezza dei numeri reali, a ogni punto $P \in \mathbf{r}$ corrisponde uno e un solo numero reale uguale alla distanza del punto P dall'origine O , indicheremo tale numero con $d(P, O)$.

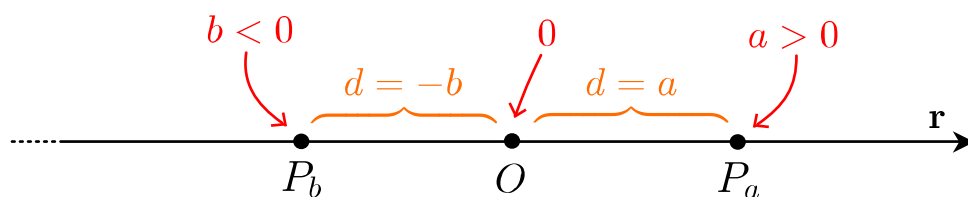
L'applicazione che a ogni punto $P \in \mathbf{r}$ associa la distanza $d(P, O)$ se P segue O rispetto all'orientazione prescelta (scriviamo $P \in \mathbf{r}^+$), l'opposto della distanza $-d(P, O)$ se P precede O (scriviamo $P \in \mathbf{r}^-$) e 0 se $P \equiv O$, viene detta **funzione ascissa** e denotata con $x : \mathbf{r} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x : P \in \mathbf{r} \mapsto x(P) = \begin{cases} d(P, O) & \text{se } P \in \mathbf{r}^+ \\ 0 & \text{se } P \equiv O \\ -d(P, O) & \text{se } P \in \mathbf{r}^- \end{cases}$$



Diremo che $x(P)$ è l'**ascissa del punto** P della retta reale.

Viceversa, per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un unico punto $P_a \in \mathbf{r}$ di ascissa a .



Abbiamo allora che per ogni $a \in \mathbb{R}$ risulta $x(P_a) = a$.

La funzione $a \in \mathbb{R} \mapsto P_a \in \mathbf{r}$ è quindi l'applicazione inversa della funzione ascissa $P \in \mathbf{r} \mapsto x(P) \in \mathbb{R}$.

La funzione ascissa determina una **corrispondenza biunivoca** tra l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} e i punti della retta reale \mathbf{r} , si usa quindi identificare la retta reale con l'insieme dei numeri reali e indicare direttamente i punti della retta reale con i corrispondenti numeri reali.

NOTA: Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha che $a < b$ se e solo se P_a precede P_b sulla retta reale rispetto all'orientazione assegnata. In questo senso la funzione ascissa preserva l'ordinamento tra i due insiemi.

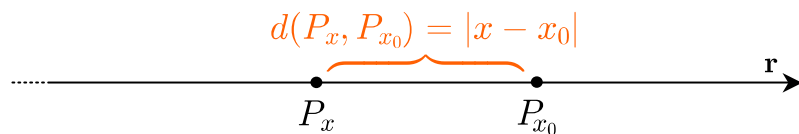
VALORE ASSOLUTO

Diciamo **valore assoluto**, o **modulo**, di un numero reale $x \in \mathbb{R}$ il numero

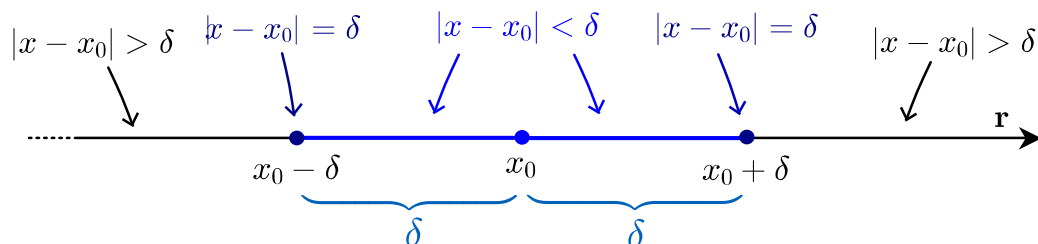
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Dalle definizioni di valore assoluto e della funzione ascissa, abbiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ il punto $P_x \in \mathbf{r}$ di ascissa x verifica $d(P_x, O) = |x|$. In generale

- per ogni $x, x_0 \in \mathbb{R}$, $|x - x_0|$ indica la **distanza** sulla retta reale tra il punto P_x di ascissa x e il punto P_{x_0} di ascissa x_0 .



In particolare, dato $\delta > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, la disequazione $|x - x_0| < \delta$ ammette come soluzioni tutti e soli i valori $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$



Valgono le seguenti proprietà

- $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- $-|x| \leq x \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- per ogni $\delta > 0$, $|x| < \delta$ se e solo se $-\delta < x < \delta$;
- **Disuguaglianza triangolare:** $|x + y| \leq |x| + |y|$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Dalla disuguaglianza triangolare segue inoltre

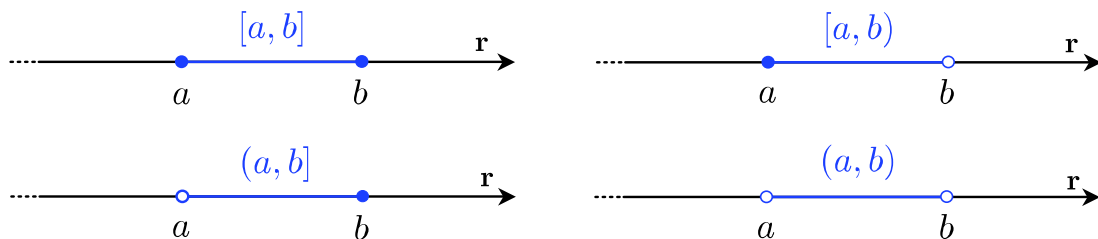
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

INTERVALLI

Particolari sottoinsiemi di \mathbb{R} sono gli *intervalli*. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ si dice **intervallo limitato** un insieme della seguente forma

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

NOTA: Gli intervalli definiti sopra corrispondono sulla retta reale a dei segmenti che hanno come estremi i punti di ascissa a e b , e ampiezza $b - a$.

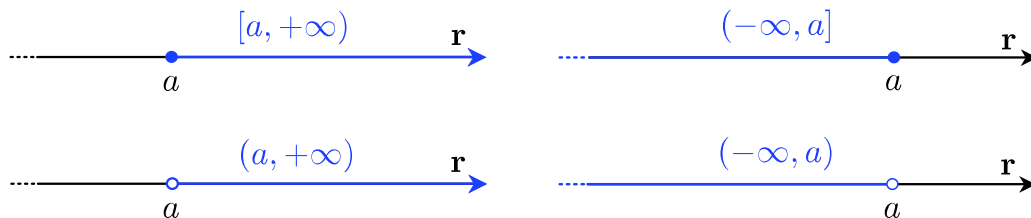


NOTA: se $a = b$ allora $[a, b] = \{a\}$ mentre $(a, b) = \emptyset$, tali insiemi sono detti **intervalli degeneri**.

Dato $a \in \mathbb{R}$, è detto **intervallo illimitato** un insieme della forma

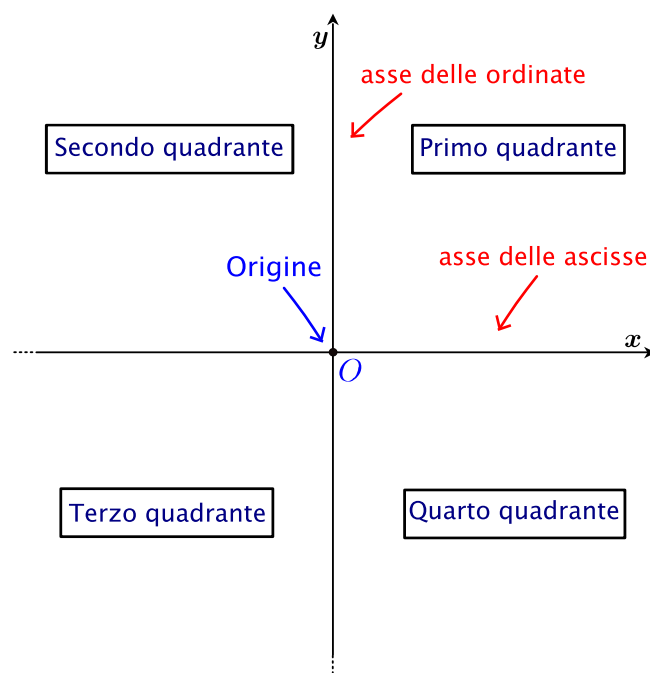
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

NOTA: Sulla retta reale gli intervalli sopra corrispondono a semirette uscenti dal punto di ascissa a , eccetto l'intervallo $(-\infty, +\infty)$ che corrisponde all'intera retta reale.



PIANO CARTESIANO

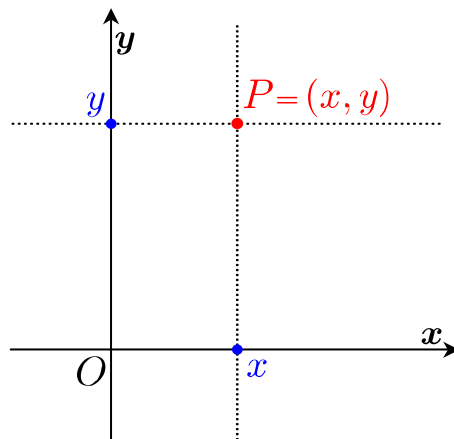
Un **sistema di riferimento cartesiano** Oxy (o **piano cartesiano**) è costituito da due rette reali tra loro perpendicolari che si intersecano nell'origine comune O . Le due rette vengono dette **assi cartesiani**, le quattro regioni in cui il piano risulta diviso dai due assi vengono dette **quadranti**



Attraverso la funzione ascissa è possibile determinare una corrispondenza biunivoca tra il piano cartesiano e l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

A ogni punto del P del piano cartesiano corrisponde un'**ascissa** $x \in \mathbb{R}$ e un'**ordinata** $y \in \mathbb{R}$ pari rispettivamente all'ascissa del punto P_x , proiezione del punto P sull'asse delle ascisse, e del punto P_y , proiezione del punto P sull'asse delle ordinate



Si dice in tal caso che il punto P ha **coordinate** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e si usa scrivere $P = (x, y)$, identificando il punto con le sue coordinate.

La **distanza** $d(P_1, P_2)$ tra due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ del piano è la lunghezza del segmento di estremi P_1 e P_2 . Grazie al teorema di Pitagora abbiamo che

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Il **punto medio** di un segmento è il punto equidistante dai due estremi, ovvero è il punto che divide il segmento in due parti uguali. Le coordinate del punto medio P_M del segmento di estremi $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ sono date da

$$P_M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

- La distanza tra i punti $P_1 = (1, -3)$ e $P_2 = (0, 2)$ vale

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{26}.$$

Il punto medio del segmento di estremi P_1 e P_2 è il punto

$$P_M = \left(\frac{1 + 0}{2}, \frac{-3 + 2}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

Ricordiamo alcune *trasformazioni* del piano

- la **traslazione** di vettore $\vec{v} = (a, b)$ trasforma il punto $P = (x, y)$ nel punto $P' = (x + a, y + b)$;
- la **simmetria centrale** di centro il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ trasforma il punto $P = (x, y)$ nel punto $P' = (2x_0 - x, 2y_0 - y)$;
- la **dilatazione orizzontale** di parametro $a > 0$ trasforma il punto $P = (x, y)$ nel punto $P' = (ax, y)$;
- la **dilatazione verticale** di parametro $b > 0$ trasforma il punto $P = (x, y)$ nel punto $P' = (x, by)$.

Ad esempio

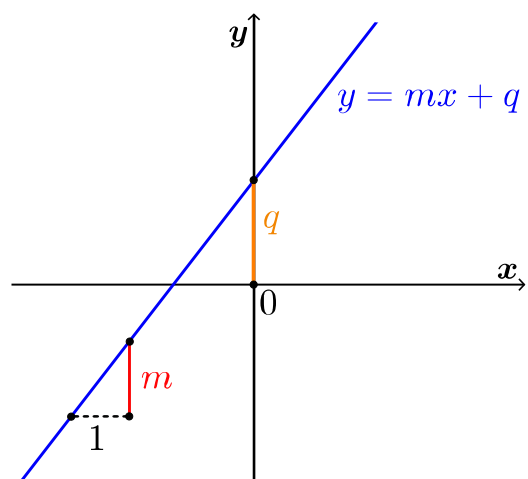
- ▶ la traslazione di vettore $\vec{v} = (0, 2)$ trasforma il punto $P = (1, -3)$ nel punto $P' = (1, -1)$;
- ▶ la simmetria centrale di centro l'origine $O = (0, 0)$ trasforma il punto $P = (-1, 2)$ nel punto $P' = (1, -2)$;
- ▶ il quadrato Q di vertici $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ e $D = (0, 1)$ per la dilatazione orizzontale di parametro $a = 3$ viene trasformato nel rettangolo di vertici $A' = (0, 0)$, $B' = (3, 0)$, $C' = (3, 1)$ e $D' = (0, 1)$; la dilatazione verticale di parametro $b = \frac{1}{2}$ lo trasforma nel rettangolo trasformato di vertici $A'' = (0, 0)$, $B'' = (1, 0)$, $C'' = (1, \frac{1}{2})$ e $D'' = (0, \frac{1}{2})$.

Ricordiamo innanzitutto che una retta in sistema di riferimento cartesiano Oxy può essere descritta da un'**equazione implicita**:

$$ax + by + c = 0 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a, b \text{ non entrambi nulli.}$$

Se $b \neq 0$, l'equazione potrà risciversi nella forma $y = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$, detta **equazione esplicita**.

Nell'equazione esplicita di una retta $y = mx + q$, il coefficiente m viene detto **coefficiente angolare**, q invece **ordinata all'origine**



Dati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$, l'equazione implicita della retta passante per P_1 e P_2 è

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$

se $x_1 \neq x_2$, l'equazione esplicita è

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

NOTA: il coefficiente angolare della retta vale $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

In particolare, l'equazione (detta **segmentaria**) della retta passante per i punti $P = (p, 0)$ e $Q = (0, q)$ è data da

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

- ▶ L'equazione della retta passante per i punti $(1, 2)$ e $(3, -4)$ è $(-4 - 2)(x - 1) - (3 - 1)(y - 2) = 0$ ovvero $6x + 2y - 10 = 0$ o anche $y = -3x + 5$;
- ▶ L'equazione della retta passante per $(3, 0)$ e $(0, -2)$ è $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ ovvero $-2x + 3y + 6 = 0$ o anche $y = \frac{2}{3}x + 3$

Date due rette di equazione implicita $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, queste sono

- **parallele** se e solo se $a \cdot b' = a' \cdot b$
- **perpendicolari** se e solo se $a \cdot a' + b \cdot b' = 0$

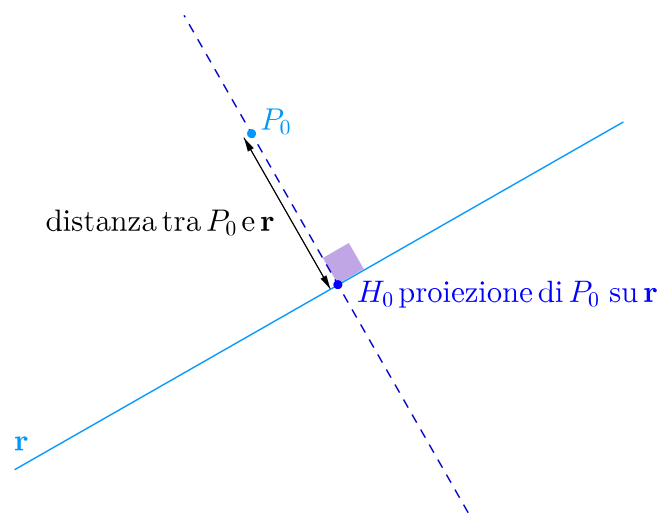
Date due rette di equazione esplicita $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$, queste sono

- **parallele** se e solo se $m = m'$
- **perpendicolari** se e solo se $m \cdot m' = -1$

Ad esempio

- ▶ Le rette $y = 2x - 10$ e $y = 2x + 1$ sono parallele
- ▶ Le rette $y = \frac{2}{3}x + 1$ e $y = -\frac{3}{2}x$ sono perpendicolari

Dati una retta r e un punto P_0 nel piano, la **proiezione ortogonale di P_0 su r** è il punto H_0 di intersezione fra r e la retta ortogonale a r passante per P_0 . La **distanza di P_0 da r** è la distanza di P_0 da H_0 .



- la distanza fra la retta r di equazione $ax + by + c = 0$ e il punto

$$P_0 = (x_0, y_0) \text{ è } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- la distanza fra la retta r di equazione $y = mx + q$ e il punto

$$P_0 = (x_0, y_0) \text{ è } \frac{|y_0 - (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

SIMMETRIA ASSIALE

CIRCONFERENZA

Ricordiamo che una **circonferenza** di centro C e raggio $r > 0$ è costituita dai punti P che hanno distanza r dal centro, ovvero tali che $d(P, C) = r$. Se $C = (x_0, y_0)$ il generico punto $P = (x, y)$ della circonferenza dovrà allora verificare l'equazione

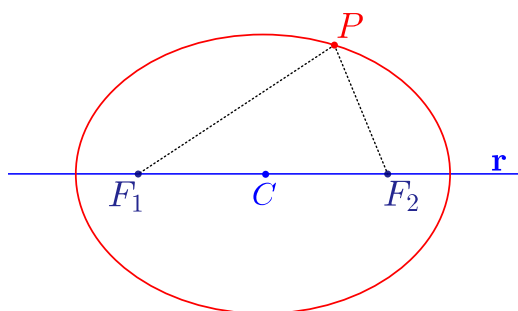
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

- ▶ L'equazione $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 1 = 0$ può essere riscritta come $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 6$, rappresenta quindi una circonferenza di centro $C = (-1, 2)$ e raggio $r = \sqrt{6}$.
- ▶ L'equazione $x^2 + x + y^2 - 4y + \sqrt{2} = 0$ può essere riscritta come $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 2)^2 = \frac{5}{4} - \sqrt{2}$ non rappresenta una circonferenza dato che $\frac{5}{4} - \sqrt{2} < 0$.

In generale l'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ si può riscrivere come

$(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - c$ e rappresenta una circonferenza se e solo se $a^2 + b^2 > 4c$

Ricordiamo che un'ellisse è il luogo dei punti del piano tali che la somma delle distanze da due **fuochi** F_1 e F_2 risulta costante. Si dice **asse focale** la retta r passante per i due fuochi, mentre è detto **centro** il punto medio del segmento F_1F_2

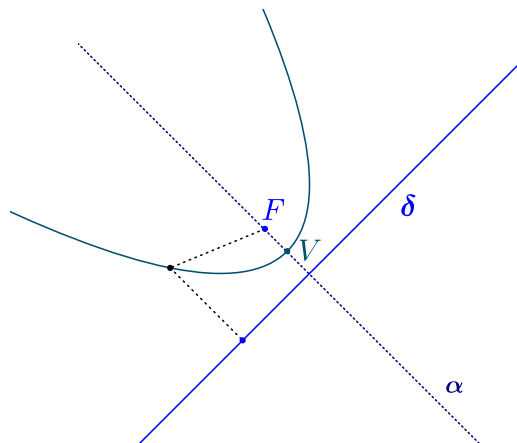


L'equazione $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ rappresenta un'ellisse di semiassi a e b , centro (x_0, y_0) e asse focale parallelo a uno degli assi cartesiani.

- L'equazione $4x^2 + 9y^2 = 36$ può essere riscritta come $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, rappresenta quindi un'ellisse di centro l'origine e semiassi $a = 3$ e $b = 2$.

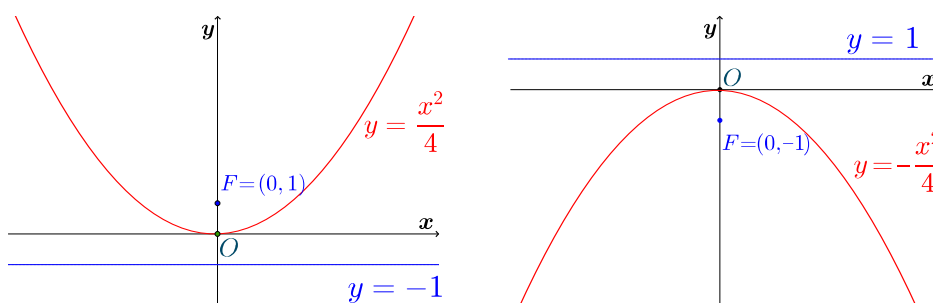
PARABOLA

La **parabola** \mathcal{P} di **fuoco** F e **direttrice** δ è il luogo dei punti P del piano che sono equidistanti da F e da δ . Indicata con H la proiezione ortogonale di F su δ , il punto medio V del segmento FH si dice **vertice** della parabola, la retta perpendicolare alla direttrice e passante per il fuoco si chiama **asse** della parabola.



NOTA: l'asse della parabola è **asse di simmetria** per la parabola

Se l'origine coincide con il vertice della parabola e l'asse delle ascisse risulta parallelo alla direttrice, si ottiene che il punto $P = (x, y)$ appartiene alla parabola \mathcal{P} di fuoco $F = (0, \frac{1}{4a})$ e direttrice $y = -\frac{1}{4a}$ se e solo se $y = ax^2$



Osservato che possiamo scrivere

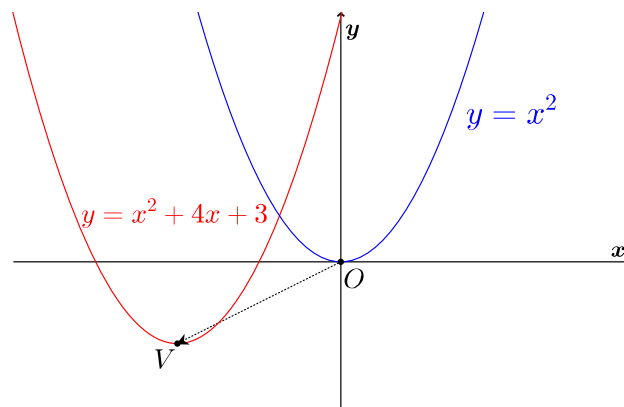
$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

riconosciamo che la parabola $y = ax^2 + bx + c$ si può ottenere dalla parabola $y = ax^2$ operando una traslazione di vettore $\vec{v} = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$. Quindi

- l'equazione $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, descrive una parabola con vertice $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, fuoco $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - (b^2 - 4ac)}{4a}\right)$, asse $x = -\frac{b}{2a}$.

Si dice inoltre che una parabola $y = ax^2 + bx + c$ ha la **concavità rivolta verso l'alto** se $a > 0$, ha la **concavità rivolta verso il basso** se $a < 0$.

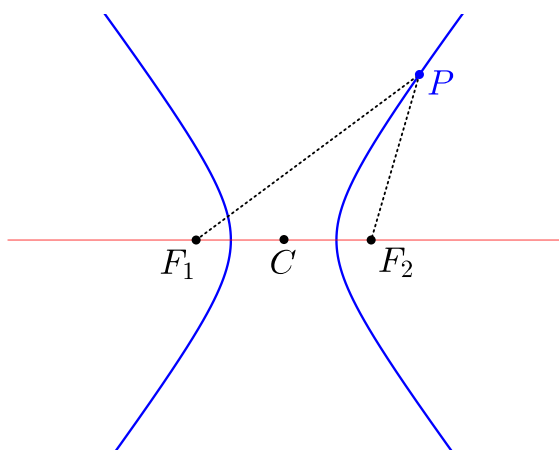
- ▶ La parabola di equazione $y = x^2 + 4x + 3$ ha concavità verso l'alto, ha vertice $V = (-2, -1)$ e asse $x = -2$. L'equazione si può riscrivere come $y = (x + 2)^2 - 1$, la parabola si ottiene quindi per traslazione di vettore $\vec{OV} = (-2, -1)$ della parabola $y = x^2$.



- ▶ L'equazione $x = y^2 + 1$ descrive una parabola con asse orizzontale, $x = 0$, vertice $V = (1, 0)$ e **concavità verso destra**: si ottiene dalla parabola $x = y^2$ per traslazione di vettore $\vec{OV} = (1, 0)$

IPERBOLE

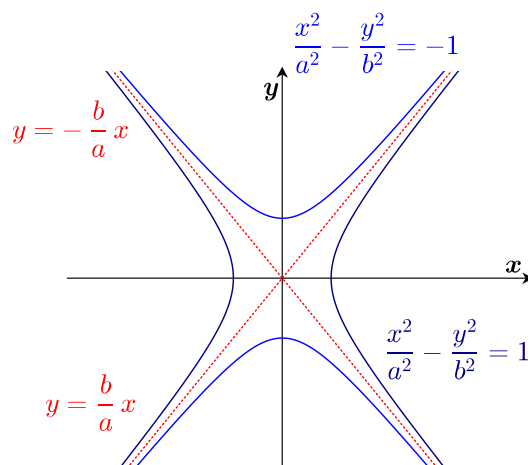
Dati due punti distinti F_1 e F_2 nel piano, si chiama **iperbole** \mathcal{I} di **fuochi** F_1 e F_2 l'insieme dei punti P del piano tali che il valore assoluto della differenza delle distanze da F_1 e F_2 risulti costante. Il punto medio C del segmento F_1F_2 viene detto **centro dell'iperbole**, la retta per F_1 e F_2 si chiama **asse focale**.



Presi $a, b > 0$ e posto $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, abbiamo che

- il luogo dei punti $P = (x, y)$ tali che $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ è l'iperbole che ha centro nell'origine, fuochi $(\pm c, 0)$ e asse focale $y = 0$;
- il luogo dei punti $P = (x, y)$ tali che $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ è l'iperbole che ha centro nell'origine, fuochi $(0, \pm c)$ e asse focale $x = 0$.

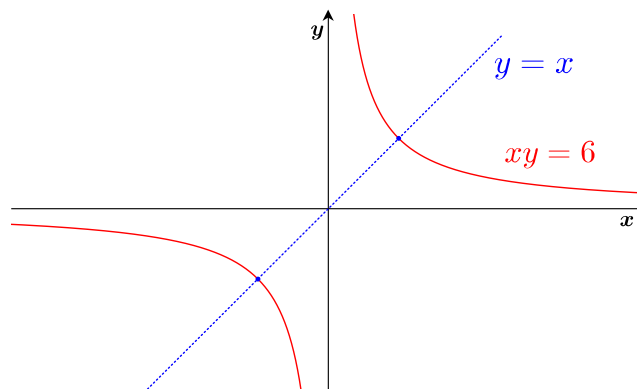
NOTA: Le rette $y = \pm \frac{b}{a}x$ sono dette **asintoti** dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$.



- L'equazione $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ descrive un'iperbole di centro l'origine, fuochi $(\pm 5, 0)$, asse focale $y = 0$ e asintoti $y = \pm \frac{4}{3}x$
- L'equazione $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = -1$ descrive un'iperbole di centro l'origine, fuochi $(0, \pm 4)$, asse focale $x = 0$ e asintoti $y = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}x$

L'equazione $x^2 - y^2 = k$ con $k \neq 0$ descrive un'iperbole avente per asintoti le bisettrici $y = \pm x$, tale iperbole è detta **equilatera**.

NOTA: anche l'equazione $xy = k$ descrive un'iperbole *equilatera*, avente come asse la bisettrice $y = x$ se $k > 0$, $y = -x$ se $k < 0$ e per asintoti gli assi cartesiani

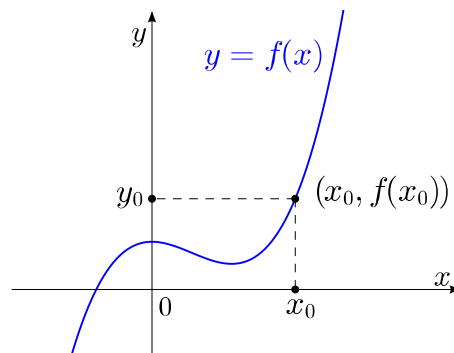


FUNZIONI REALI

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si dice **funzione reale**. Il **grafico** di una funzione reale è il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 definito da

$$\text{Graph}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D, y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D\}$$

Il grafico si può quindi rappresentare in un piano cartesiano Oxy



NOTA: Nel caso di funzioni reali, spesso si usa indicare solo la legge $f(x)$, sottintendendo che il dominio D è costituito da tutti i numeri reali per i quali sono possibili le operazioni indicate nella legge $f(x)$.

- ▶ La funzione $f(x) = x^2$ ha dominio \mathbb{R} e per grafico la parabola $y = x^2$
- ▶ La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ ha dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e per grafico l'iperbole $y = \frac{1}{x}$.

- **Funzione costante:** $f(x) = b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f(x)) = \{b\}$
- **Funzione lineare:** $f(x) = ax + b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$ e se $a \neq 0$, $\text{Im}(f(x)) = \mathbb{R}$
- **Funzione valore assoluto:** $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$
 $\text{Dom}(|x|) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(|x|) = [0, +\infty)$.
- **Funzione parte intera:** $f(x) = [x] = n$ dove $n \in \mathbb{Z}$ è tale che $n \leq x < n + 1$. Si ha che $\text{Dom}([x]) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}([x]) = \mathbb{Z}$.
- **Funzione mantissa:** $m(x) = x - [x]$, risulta $\text{Dom}([x]) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(m) = [0, 1)$.
- **Funzione segno:** $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$, abbiamo
 $\text{Dom}(\text{sgn}(x)) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\text{Im}(\text{sgn}(x)) = \{-1; 1\}$.
- **Funzione di Dirichlet:** $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ si ha
 $\text{Dom}(D(x)) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(D(x)) = \{0; 1\}$.

FUNZIONI PERIODICHE, PARI e DISPARI

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta **periodica** di periodo $T \in \mathbb{R}$ se

- D è tale che $x + T \in D$ per ogni $x \in D$,
- $f(x + T) = f(x)$ per ogni $x \in D$.

La funzione mantissa è un esempio di funzione periodica di periodo 1.

Data una funzione reale $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sia D **simmetrico rispetto all'origine**, cioè è tale che se $x \in D$ allora $-x \in D$.

La funzione è detta **pari** se

$$f(-x) = f(x) \text{ per ogni } x \in D$$

La funzione è detta invece **dispari** se

$$f(-x) = -f(x) \text{ per ogni } x \in D$$

Abbiamo che il grafico di una funzione pari risulta simmetrico rispetto all'asse delle ordinate mentre quello di una funzione dispari risulta simmetrico rispetto all'origine del piano cartesiano.

Ad esempio le funzioni $|x|$ e x^2 sono pari, mentre $\text{sgn}(x)$, x e x^3 sono funzioni dispari.

FUNZIONI MONOTONE

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **crescente** in un intervallo $I \subseteq D$ se

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ si ha che } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

mentre si dice **decrescente** in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ se

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ si ha che } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Una funzione si dice **monotona** se è crescente oppure decrescente.

Quando vale la disuguaglianza stretta anche per i valori della $f(x)$, allora la funzione si dice **strettamente monotona**. In particolare, la funzione è **strettamente crescente** in un intervallo $I \subseteq D$ se

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ si ha } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

mentre è **strettamente decrescente** in un intervallo $I \subseteq D$ se

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ si ha } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Abbiamo che ogni funzione strettamente monotona è iniettiva

OPERAZIONI tra FUNZIONI REALI

A partire dalle operazioni tra numeri reali si possono definire analoghe operazioni tra funzioni reali. Date due funzioni $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, possiamo definire:

- la **funzione somma e differenza** $f \pm g$, definite da $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ per ogni $x \in D$;
- la **funzione prodotto** $f \cdot g$ definita da $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ per ogni $x \in D$;
- la **funzione quoziente**, $\frac{f}{g}$ definita da $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ per ogni $x \in D$ tale che $g(x) \neq 0$.

Casi particolari sono il **prodotto di una funzione per una costante** $k \in \mathbb{R}$, $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$, e il **reciproco di una funzione** $\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}$.

NOTA: Le funzioni somma e prodotto sono definite nello stesso dominio D delle funzioni f e g , mentre la funzione quoziente è definita nel sottoinsieme $D_0 = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$

TRASFORMAZIONI di GRAFICI

Per alcune particolari composizioni di funzioni è possibile ricavare il grafico della funzione composta a partire da quello delle funzioni componenti, con semplici trasformazioni geometriche del grafico come *traslazioni*, *simmetrie assiali* e *riscalamenti*.

► TRASLAZIONI

Particolari funzioni composte sono quelle ottenute componendo la funzione $g(x) = x + k$, dove $k \in \mathbb{R}$, con una funzione $f(x)$

$$(g \circ f)(x) = f(x) + k \quad \text{e} \quad (f \circ g)(x) = f(x + k).$$

Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si ha

- il grafico della funzione $f(x) + k$ si ottiene **traslando verticalmente** il grafico di $f(x)$, verso l'alto se $k > 0$, verso il basso se $k < 0$,
- il grafico della funzione $f(x + k)$ si ricava **traslando orizzontalmente** il grafico di $f(x)$, verso sinistra se $k > 0$, verso destra se $k < 0$.

► SIMMETRIE

Altre composizioni rilevanti si trovano componendo la funzione $g(x) = -x$ con una funzione $f(x)$, ottenendo le funzioni

$$(g \circ f)(x) = -f(x) \quad \text{e} \quad (f \circ g)(x) = f(-x).$$

- il grafico di $-f(x)$ è il simmetrico del grafico di $f(x)$ rispetto all'asse \mathbf{x} ,
- il grafico di $f(-x)$ è il simmetrico del grafico di $f(x)$ rispetto all'asse \mathbf{y} .

Particolari simmetrie, parziali, si trovano componendo una funzione $f(x)$ con la funzione $g(x) = |x|$

$$(g \circ f)(x) = |f(x)| \quad \text{e} \quad (f \circ g)(x) = f(|x|).$$

- il grafico di $|f(x)|$ si ottiene da quello della funzione $f(x)$ operando una simmetria rispetto all'asse \mathbf{x} della porzione di grafico in cui $f(x) < 0$;
- il grafico di $f(|x|)$ si ottiene da quello della funzione $f(x)$ operando una simmetria rispetto all'asse \mathbf{y} della porzione di grafico in cui $x > 0$.

► RISCALAMENTI

Altre interessanti composizioni di funzioni si ottengono componendo una funzione $f(x)$ con la funzione $g(x) = kx$, dove $k > 0$,

$$(g \circ f)(x) = kf(x) \quad \text{e} \quad (f \circ g)(x) = f(kx).$$

- Il grafico della funzione $kf(x)$ si ottiene operando un riscalamento della variabile y , che ha l'effetto di una **dilatazione orizzontale** se $k > 1$, una **contrazione orizzontale** se $k < 1$;
- il grafico della funzione $f(kx)$ si ottiene operando un riscalamento della variabile x , che ha l'effetto di una **dilatazione verticale** se $k < 1$, una **contrazione verticale** se $k > 1$.

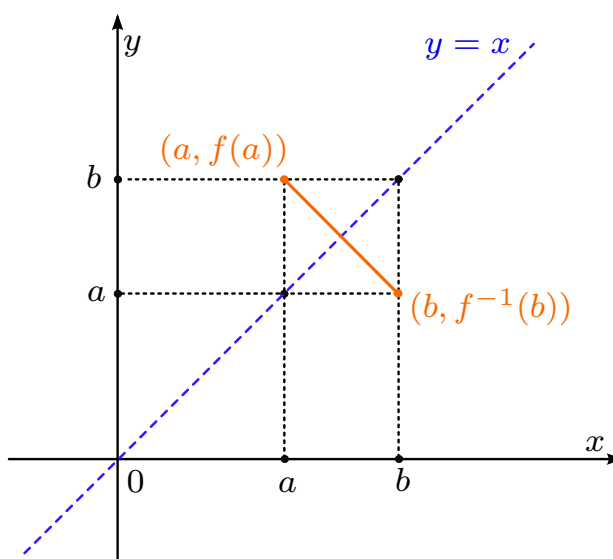
GRAFICO della FUNZIONE INVERSA

Data una funzione reale bigettiva $f : D \rightarrow C$, per ogni $a \in D$, posto $b = f(a)$, si ha

$$(a, b) \in \text{Graph}(f) \quad \Leftrightarrow \quad (b, a) \in \text{Graph}(f^{-1})$$

ed essendo (a, b) e (b, a) simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$, otteniamo

- il **grafico della funzione inversa** $y = f^{-1}(x)$ è simmetrico al grafico di $y = f(x)$ rispetto alla bisettrice $y = x$.



POTENZE a ESPONENTE INTERO

Dato $n \in \mathbb{Z}$ **intero positivo**, si pone per definizione

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}}, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ non nullo si definisce inoltre $x^0 = 1$ e $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Per $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$ non nullo, x^n è detto **potenza di esponente n e base x** .

Per ogni $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ risulta

■ $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

■ $(x^n)^m = x^{nm} = (x^m)^n$

■ $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

■ $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

In particolare, dall'ultima proprietà, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$ non nulli, si ha

■ $(-x)^n = x^n$ se n è pari, $(-x)^n = -x^n$ se n è dispari;

■ $x^n \geq 0$ se n è pari.

Inoltre per ogni n, m **interi positivi** abbiamo

- se $0 < x < y$ allora $x^n < y^n$
- per $n < m$, se $x \in (0, 1)$ allora $x^n > x^m$, mentre se $x \in (1, +\infty)$ si ha $x^n < x^m$

NOTA: Se $n \in \mathbb{N}$ è dispari, risulta

$$x < y \text{ se e solo se } x^n < y^n .$$

Se invece $n \in \mathbb{N}$ è pari con $n \neq 0$, abbiamo che

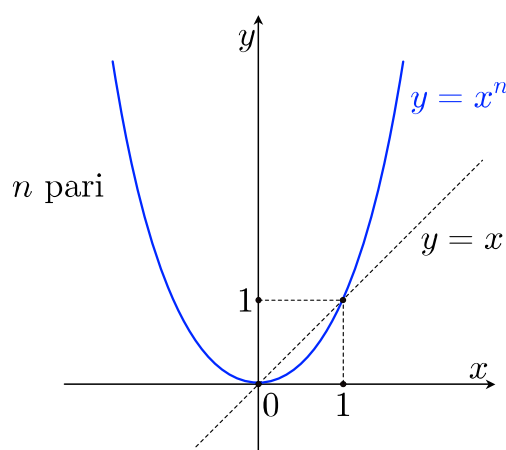
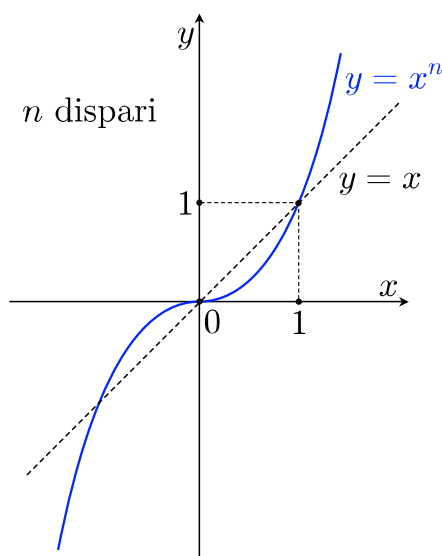
$$\text{se } 0 < x < y \text{ allora } x^n < y^n \text{ e se } x < y < 0 \text{ allora } x^n > y^n$$

Se invece $x < 0 < y$ nulla si può dire riguardo all'ordinamento di x^n e y^n .

- ▶ Dato che $0 < 2 < \frac{8}{3}$, abbiamo $2^2 < \left(\frac{8}{3}\right)^2$ mentre essendo $-\frac{5}{2} < -\frac{1}{3} < 0$ abbiamo $\left(-\frac{5}{2}\right)^4 > \left(-\frac{1}{3}\right)^4$.
- ▶ Risulta $-2 < 0 < 3$ e $(-2)^2 = 4 < 3^2 = 9$ mentre $-1 < 0 < \frac{1}{2}$ ma $(-1)^2 = 1 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

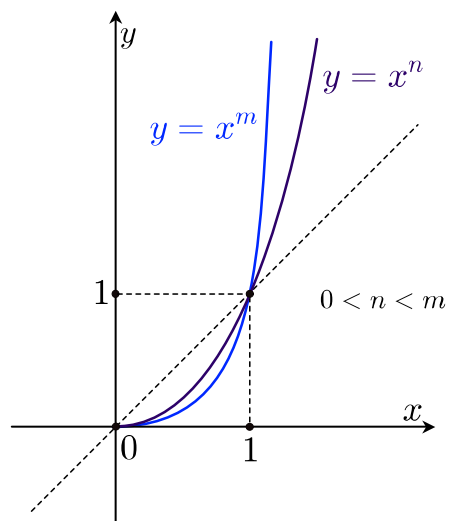
Dato n intero positivo consideriamo la **funzione potenza a esponente intero positivo** $p_n(x) = x^n$. Abbiamo

- **DOMINIO:** $\text{Dom}(p_n) = \mathbb{R}$;
- **IMMAGINE:** $\text{Im}(p_n) = \mathbb{R}$ se n è dispari, $\text{Im}(p_n) = [0, +\infty)$ se n è pari;
- **SIMMETRIE:** $p_n(x)$ è funzione dispari se n è dispari, pari se n è pari;
- **MONOTONIA:** $p_n(x)$ è strettamente crescente in \mathbb{R} se n è dispari, mentre se n è pari $p_n(x)$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$, strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$.



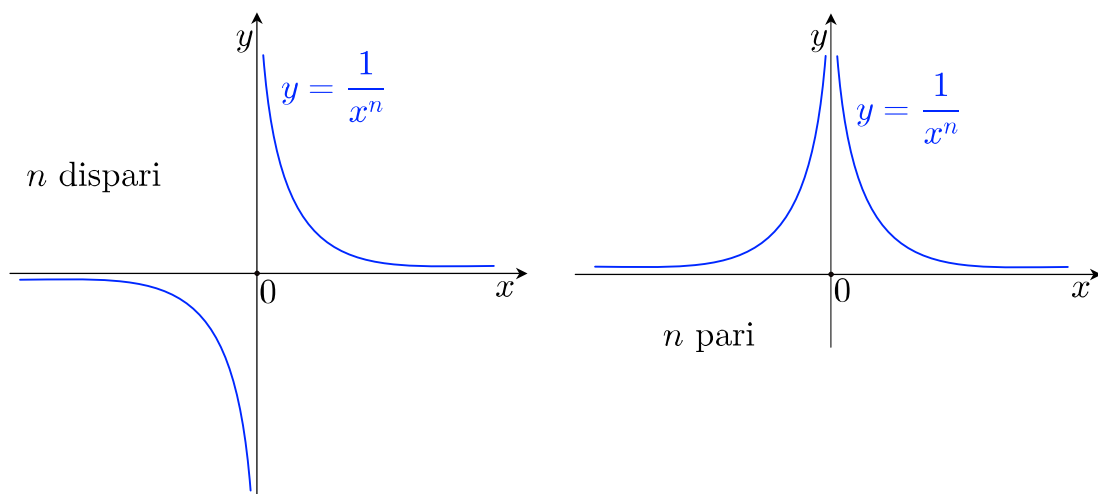
Per ogni n, m interi con $0 < n < m$ si ha

- **CONFRONTO:** $p_n(x) > p_m(x)$ per $x \in (0, 1)$ mentre $p_n(x) < p_m(x)$ per $x \in (1, +\infty)$.



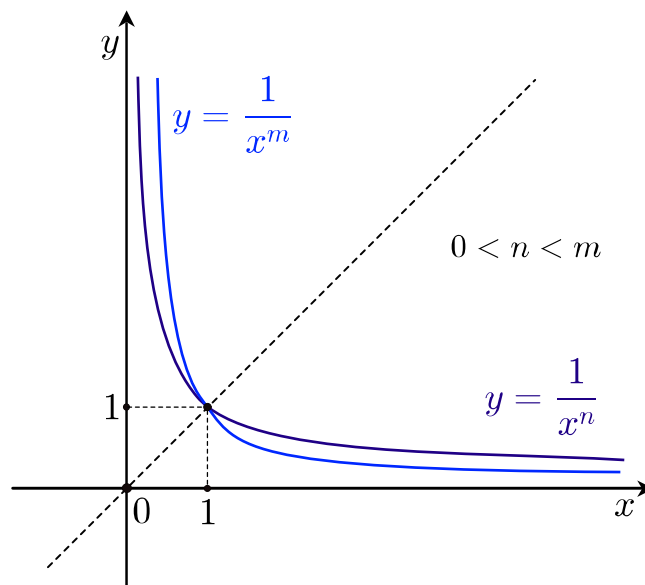
Per ogni n intero positivo, consideriamo la **funzione potenza a esponente intero negativo** $p_{-n}(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Si ha

- **DOMINIO:** $\text{Dom}(p_{-n}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- **IMMAGINE:** $\text{Im}(p_{-n}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se n è dispari, $\text{Im}(p_{-n}) = (0, +\infty)$ se n è pari
- **SIMMETRIE:** $p_{-n}(x)$ è funzione dispari se n è dispari, pari se n è pari
- **MONOTONIA:** $p_{-n}(x)$ è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$, mentre in $(-\infty, 0)$ è strettamente decrescente se n è dispari, strettamente crescente se n è pari.



Inoltre se n, m sono numeri interi tali che $0 < n < m$ allora

- **CONFRONTO:** $p_{-n}(x) < p_{-m}(x)$ per $x \in (0, 1)$, $p_{-n}(x) > p_{-m}(x)$ per $x \in (1, +\infty)$.



A partire dalle potenze a esponente naturale x^n con $n \in \mathbb{N}$ sono definiti i *polinomi*. Si dice **polinomio** nella variabile x , un'espressione del tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

dove $a_k \in \mathbb{R}$ per ogni $k = 0, \dots, n$, sono i **coefficienti** del polinomio, a_0 il **termine noto**, a_n se non nullo **coefficiente direttore**.

Si dice **grado del polinomio** $p(x)$ il grado massimo delle potenze che compaiono nel polinomio.

Si dice inoltre **monomio** un polinomio dove compare una sola potenza, **binomio** se compaiono due potenze, **trinomio** tre.

Ricordiamo inoltre che si dice **zero** o **radice** di un polinomio $p(x)$ ogni numero reale x_0 per il quale risulta $p(x_0) = 0$.

- Il polinomio $p(x) = -2x^4 + x + 1$ è un trinomio, ha grado 4, termine noto 1 e coefficiente direttore -2 . $x_0 = 1$ è un suo zero.

EQUAZIONI e DISEQUAZIONI ALGEBRICHE

Un'**equazione o disequazione algebrica** è un'equazione o disequazione dove sono coinvolti dei polinomi, che potremo scrivere in *forma canonica* come

$$p(x) = q(x), \quad p(x) > 0 \quad \text{oppure} \quad p(x) < 0,$$

dove $p(x)$ è un polinomio.

Si dice **grado dell'equazione o della disequazione** il grado del polinomio $p(x)$, coinvolto nell'equazione o disequazione.

- ▶ $x^2 + x = 0$ è un'equazione di grado 2.
- ▶ $x^3 - x + 1 > 0$ è una disequazione di grado 3.

Un valore $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto **soluzione dell'equazione** $p(x) = 0$ se risulta $p(x_0) = 0$. In modo analogo, un valore $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto **soluzione della disequazione** $p(x) > 0$ se risulta $p(x_0) > 0$.

Risolvere un'equazione o una disequazione significa determinarne *tutte* le soluzioni.

Infine, due equazioni o due disequazioni sono dette **equivalenti** se ammettono le stesse soluzioni.

Per risolvere un'equazione o per trasformarla in un'equazione equivalente potremo usare le seguenti proprietà, conseguenze degli assiomi algebrici:

- *aggiungendo o togliendo ad ambo i membri di un'equazione una stessa quantità, si ottiene un'equazione equivalente a quella data;*
- *moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione per una stessa quantità non nulla, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.*

Ad esempio

- ▶ l'equazione $3x^2 + 2x = x - 1$ risulta equivalente all'equazione $3x^2 + x + 1 = 0$,
- ▶ l'equazione $\frac{1}{2}x^2 + x = 1$ risulta equivalente all'equazione $x^2 + 2x = 2$.

Attenzione a quando si moltiplicano o dividono ambo i membri di un'equazione per un'espressione contenente un'indeterminata

- ▶ L'equazione $x^2(x - 3) = x - 3$ **non** risulta equivalente all'equazione $x^2 = 1$, essendo $x_0 = 3$ soluzione della prima ma non della seconda equazione.
- ▶ L'equazione $\alpha x^2 + 2\alpha x = \alpha^2$, dove α è un parametro reale, risulta equivalente all'equazione $x^2 - 2x = \alpha$ solo nel caso in cui $\alpha \neq 0$. Se $\alpha = 0$ l'equazione risulta verificata da ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per risolvere una disequazione o per trasformarla in una disequazione equivalente potremo invece usare le seguenti proprietà, conseguenze degli assiomi d'ordine:

- *aggiungendo o togliendo ad ambo i membri di una disequazione una stessa quantità, si ottiene una disequazione equivalente a quella data;*
- *moltiplicando o dividendo ambo i membri di una disequazione per una stessa quantità positiva, si ottiene una disequazione equivalente a quella data.*
- ▶ $2x^2 + 2x \leq 1$ è equivalente a $2x^2 + 2x - 1 \leq 0$ a sua volta equivalente a $x^2 + x - \frac{1}{2} \leq 0$

Attenzione a quando si moltiplicano o dividono ambo i membri di una disequazione per un'espressione contenente un'indeterminata (incognita o parametro).

- ▶ La disequazione $x^2 + 2x \leq x$ non risulta equivalente alla disequazione $x + 2 \leq 1$, essendo $x_0 = 0$ soluzione della prima ma non della seconda.
- ▶ La disequazione $\alpha x \leq 2$, dove α è un parametro reale, risulta equivalente all'equazione $x \leq \frac{2}{\alpha}$ solo nel caso in cui $\alpha > 0$. Se $\alpha < 0$ la disequazione risulta verificata da ogni $x \geq \frac{2}{\alpha}$.

Vedremo nel seguito come risolvere equazioni e disequazioni di primo e di secondo grado:

$$\boxed{ax + b = 0}, \quad \boxed{ax + b > 0} \quad \text{e} \quad \boxed{ax + b < 0}, \quad a \neq 0$$

e

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}, \quad \boxed{ax^2 + bx + c > 0} \quad \text{e} \quad \boxed{ax^2 + bx + c < 0}, \quad a \neq 0$$

Il caso di equazioni e disequazioni algebriche di grado maggiore di due si potrà ricondurre alla risoluzioni di equazioni e disequazioni di primo e secondo grado lineari una volta determinata una *decomposizione* del polinomio $p(x)$ nel prodotto di polinomi di primo e secondo grado:

$$p(x) = p_1(x) p_2(x) \dots p_k(x)$$

dove il grado di $p_i(x)$ risulta minore o uguale a 2 per ogni $i = 1, \dots, k$.

EQUAZIONI e DISEQUAZIONI di PRIMO GRADO

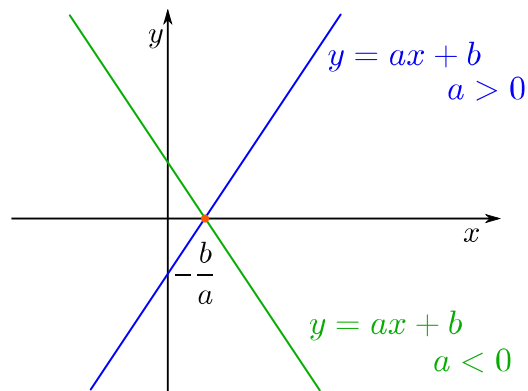
Un'equazione di primo grado è un'espressione del tipo

$$ax + b = 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Per risolvere l'equazione basta sottrarre b e dividere entrambi i termini per a , ottenendo l'unica soluzione

$$x = -\frac{b}{a}$$

Risolvere una tale equazione significa, graficamente, determinare le ascisse dei punti di intersezione della retta $y = ax + b$ con l'asse delle ascisse



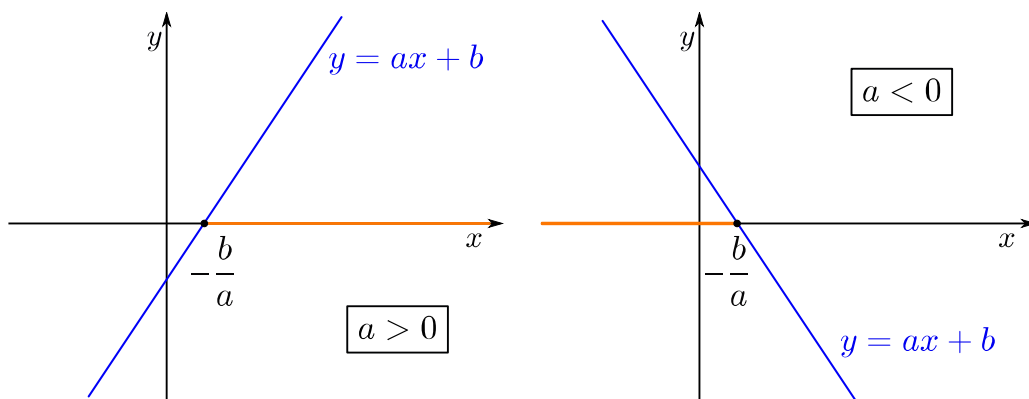
Per risolvere la disequazione di primo grado

$$ax + b > 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, dopo aver sottratto b , occorre dividere per a entrambi i membri della disequazione ottenendo le soluzioni

$$x > -\frac{b}{a}, \quad \text{se } a > 0 \quad \text{e} \quad x < -\frac{b}{a}, \quad \text{se } a < 0$$

Risolvere una tale disequazione significa, graficamente, determinare le ascisse dei punti della retta $y = ax + b$ con *ordinata positiva*



- ▶ L'equazione $3x + 2 = 0$ ammette come soluzione $x = -\frac{2}{3}$
- ▶ La disequazione $2x + 1 < 4x - 2$ è risolta per $x > \frac{3}{2}$
- ▶ La disequazione $2x + 4 \geq \pi$ è risolta da $x \geq \frac{\pi}{2} - 2$
- ▶ L'equazione $3x - \alpha = x$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è verificata da $x = \frac{\alpha}{2}$ per ogni α
- ▶ La disequazione $\alpha x + 1 < 2x$ è risolta da $x < \frac{1}{2-\alpha}$ se $\alpha > 2$, $x < \frac{1}{2-\alpha}$ se $\alpha < 2$, non ammette soluzioni se $\alpha = 2$
- ▶ La disequazione $|2x + 5| \leq 3$ ammette come soluzioni $-4 \leq x \leq -1$
- ▶ L'equazione $|x + 1| = |x - 3|$ ammette come unica soluzione $x = 1$

EQUAZIONI e DISEQUAZIONI di SECONDO GRADO

Ricordiamo che le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

dipendono dal segno del **discriminante** $\Delta = b^2 - 4ac$. Infatti, abbiamo che

- se $\Delta > 0$ allora l'equazione ha due soluzioni, $x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- se $\Delta = 0$, l'equazione ha una sola soluzione, $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- se $\Delta < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali.

NOTA: se $\Delta > 0$ abbiamo che vale la decomposizione

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_-)(x - x_+)$$

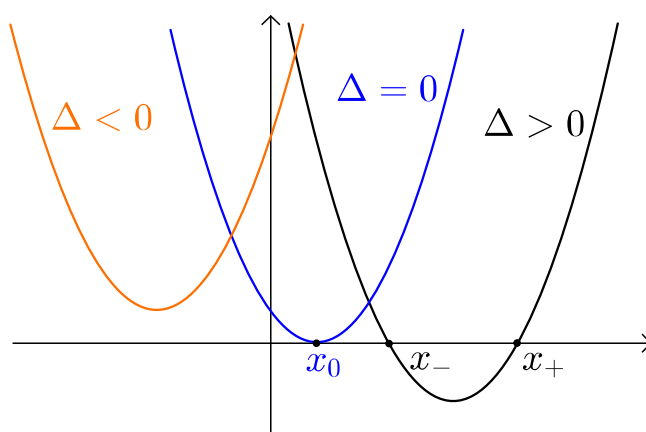
se invece $\Delta = 0$ allora

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

mentre se $\Delta < 0$ il polinomio $ax^2 + bx + c$ non si può decomporre nel prodotto di polinomi di primo grado, è *indecomponibile*.

Ricordando che l'equazione $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta i punti di una parabola, abbiamo che risolvere l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ graficamente significa determinare le ascisse dei punti di intersezione di tale parabola con l'asse delle ascisse.

Nel caso $a > 0$ abbiamo allora



- ▶ L'equazione $x^2 - 2x + 1 = 0$ ammette come unica soluzione $x = 1$ essendo $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.
- ▶ L'equazione $x^2 - 3x + 2 = 0$ ammette come soluzioni $x = 1$ e $x = 2$ in quanto riconosciamo che $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. L'equazione $2x^2 - 6x + 4 = 0$ è equivalente alla precedente, osserviamo che abbiamo $2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 1)(x - 2)$.
- ▶ L'equazione $x^2 - 4x + 5 = 0$ non ammette soluzioni reali, infatti si ha $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- ▶ L'equazione $x^2 + 2x = x - 4$ non ammette soluzione, infatti risulta equivalente all'equazione $x^2 + x + 4 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} = 0$ che non ammette soluzione essendo $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- ▶ $x^2 + 2x = |x - 4|$ ammette come soluzione $x = -4$ e $x = 1$.
- ▶ Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione $\alpha x^2 = 1 - 2x$ ammette un'unica soluzione e per tali valori determinarla. [$\alpha = 0$ e $\alpha = -1$]
- ▶ Tra le rette passanti nel punto $P(1, -1)$ determinare le rette che risultano tangenti alla parabola $y = x^2 - 1$. [$y = -1$ e $y = 4x - 5$]

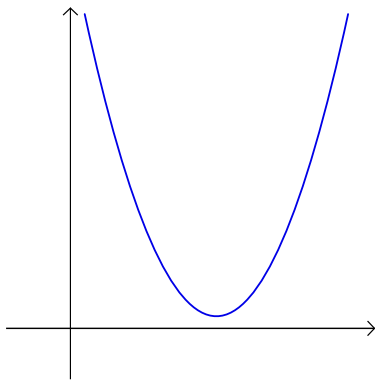
Una disequazione di secondo grado è un'espressione del tipo

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{oppure} \quad ax^2 + bx + c < 0.$$

Per risolvere una disequazione di secondo grado occorre quindi studiare il segno del trinomio $ax^2 + bx + c$.

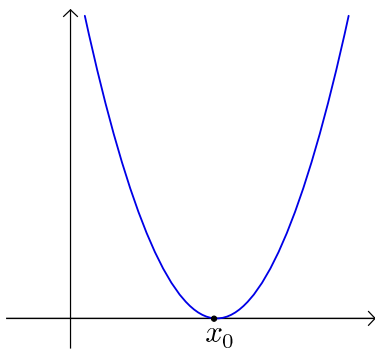
Facendo riferimento all'interpretazione grafica e limitandoci al caso $a > 0$ abbiamo

■ se $\Delta < 0$ la parabola non interseca l'asse x



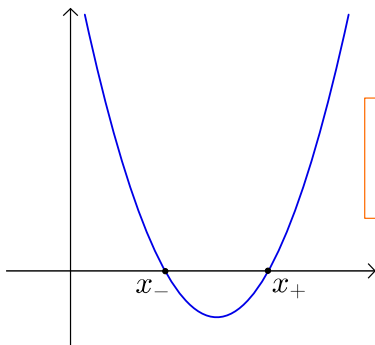
$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

■ se $\Delta = 0$ la parabola ha il vertice sull'asse x di ascissa $x_0 = -\frac{b}{a}$



$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$$

■ se $\Delta > 0$ la parabola interseca l'asse x in due punti di ascissa $x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$



$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ se } x < x_- \vee x > x_+$$
$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ se } x_- < x < x_+$$

- ▶ La disequazione $x^2 + x + 3 > 0$ risulta verificata da ogni $x \in \mathbb{R}$;
- ▶ La disequazione $-9x^2 + 12x - 4 \geq 0$ è verificata solo da $x = \frac{2}{3}$;
- ▶ La disequazione $x^2 + 2 \leq 3x$ ammette come soluzione ogni $1 \leq x \leq 2$;
- ▶ La disequazione $x^2 + x + \alpha < 0$ non ammette soluzioni se e solo se $\alpha > \frac{1}{4}$;
- ▶ La disequazione $x^2 + \alpha x + 1 \geq 0$ risulta sempre verificata se e solo se $\alpha = \pm 2$;
- ▶ La disequazione $|x^2 - 2| < x$ ammette come soluzione ogni $x \in (1, 2)$;
- ▶ La disequazione $|x - 2| \geq x^2$ ammette come soluzione ogni $x \in (-2, -1)$.

EQUAZIONI e DISEQUAZIONI ALGEBRICHE di GRADO MAGGIORE di 2

Per equazioni e disequazioni algebriche di grado maggiore di due potremo ricondurci ai precedenti casi una volta ottenuta una decomposizione del polinomio nel prodotto di polinomi di primo e secondo grado. Per ottenere la decomposizione ricordiamo alcuni risultati

TEOREMA DI RUFFINI O DEL RESTO. Dato un polinomio $p(x)$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, il resto della divisione di $p(x)$ per $x - x_0$ è $p(x_0)$. In particolare x_0 è una radice di $p(x)$ se e solo se $x - x_0$ è un fattore di $p(x)$, cioè si ha

$p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$ dove $q(x)$ è il quoziente della divisione di $p(x)$ per $x - x_0$.

TEOREMA DEGLI ZERI RAZIONALI. Se $x_0 = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ è uno zero di un polinomio a coefficienti interi, allora b è un divisore del termine noto e a è un divisore del coefficiente direttore.

Ricordiamo poi che valgono le seguenti identità

- $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$
- $b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$
- $b^3 + a^3 = (b + a)(b^2 - ab + a^2)$

► $x^3 + 2x^2 + x = 0$ ammette come soluzioni $x = 0$ e $x = -1$ essendo
 $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

► $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ ammette come soluzioni $x = \pm 1$ e $x = -2$ dato che

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2) = (x - 1)(x + 1)(x + 2).$$

► $x^4 + x^3 - x - 1 < 0$ ammette come soluzioni ogni $|x| < 1$ essendo

$$x^4 + x^3 - x + 1 = x(x^3 - 1) + x^3 - 1 = (x^3 - 1)(x + 1) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

e $x^2 + x + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1 < 0$ se e solo se $|x| < 1$.

► La disequazione $x^4 - x^2 - 2 \geq 0$ potrà ricondursi a una disequazione di secondo grado ponendo $y = x^2$. In tal modo la disequazione diventa $y^2 - y - 2 \geq 0$, verificata per $y < -1$ e per $y > 2$. Tornando alla variabile x si ottiene $x^2 < -1$ e $x^2 > 2$.

La prima disequazione non ha soluzioni mentre la seconda disequazione è verificata per $|x| > \sqrt{2}$.

EQUAZIONI e DISEQUAZIONI ALGEBRICHE FRATTE

Si potrà ricondurre alla risoluzione di equazioni e disequazioni algebriche la risoluzione di **equazioni e disequazioni algebriche fratte**, ovvero equazioni e disequazioni della forma canonica

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} = 0}, \quad \boxed{\frac{p(x)}{q(x)} > 0} \quad \text{oppure} \quad \boxed{\frac{p(x)}{q(x)} < 0}$$

essendo $p(x)$ e $q(x)$ due polinomi. Abbiamo infatti che

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) = 0 \\ q(x) \neq 0 \end{cases}}$$

mentre

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) > 0 \\ q(x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} p(x) < 0 \\ q(x) < 0 \end{cases}}$$

e

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) > 0 \\ q(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} p(x) < 0 \\ q(x) > 0 \end{cases}}$$

- ▶ L'equazione $\frac{x-2}{x^2-x-2} = 0$ non ammette soluzioni.
- ▶ L'equazione $\frac{x-2}{x^2-x-2} = 1$ ammette come unica soluzione $x = 0$.
- ▶ L'equazione $\frac{x-3}{x+2} = \alpha$ non ammette soluzioni per $\alpha = 1$, mentre per $\alpha \neq 1$ ammette come unica soluzione $x = \frac{3-2\alpha}{1-\alpha}$.
- ▶ La disequazione $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x+1}$ ammette come soluzione ogni $|x| > 1$,
- ▶ La disequazione $\frac{1}{x^2} > \alpha$ ammette come soluzione ogni $x \neq 0$ se $\alpha \leq 0$ mentre se $\alpha > 0$ ammette come soluzione ogni $|x| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$
- ▶ La disequazione $|x-1| < \frac{1}{x}$ ammette come soluzione ogni $0 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Per n intero positivo, la **radice n -esima** $\sqrt[n]{x}$ è definita come l'operazione inversa dell'elevamento a potenza n -esima.

- **Caso $n \in \mathbb{N}$ dispari**

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ dispari, la funzione $p_n(x) = x^n$ risulta strettamente crescente e dunque iniettiva in \mathbb{R} . Abbiamo allora che per ogni $x \in \text{Im}(p_n) = \mathbb{R}$ esiste un unico $y \in \mathbb{R}$ tale che $p_n(y) = y^n = x$. Ponendo per definizione $y = \sqrt[n]{x}$ abbiamo quindi

$$x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt[n]{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad y \in \mathbb{R}, \quad y^n = x$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ dispari valgono allora le **leggi di cancellazione**

$$\sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{e} \quad (\sqrt[n]{x})^n = x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

NOTA: dato che $(-x)^n = -x^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ dispari, abbiamo che

$$\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ dispari}$$

• **Caso** $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, **pari**

Se $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, è pari la funzione $p_n(x) = x^n$ non risulta iniettiva in tutto il suo dominio ma risulta iniettiva se ne consideriamo la restrizione all'insieme $[0, +\infty)$. Abbiamo allora che per ogni $x \in \text{Im}(p_n|_{[0, +\infty)})$ esiste un unico $y \in [0, +\infty)$ tale che $y^n = x$. Ponendo per definizione $y = \sqrt[n]{x}$ abbiamo dunque

$$x \in [0, +\infty), \quad \sqrt[n]{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad y \in [0, +\infty), \quad y^n = x$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ pari non nullo valgono le **leggi di cancellazione**

$$\sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{e} \quad (\sqrt[n]{x})^n = x \quad \text{per ogni } x \geq 0$$

NOTA: per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ pari non nullo, abbiamo $x^n = (-x)^n \geq 0$. Dalle leggi di cancellazione, per ogni $x < 0$ avremo allora che $\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{(-x)^n} = -x$. Si ha pertanto

$$\sqrt[n]{x^n} = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, pari

Dalla definizione data e dalle leggi di cancellazione abbiamo la seguente **proprietà invariante** dei radicali.

$${}^{n \cdot p}\sqrt{x^{m \cdot p}} = {}^n\sqrt{x^m} \quad \text{per ogni } x \geq 0, m, n, p \in \mathbb{N} \text{ non nulli}$$

Dalle proprietà delle potenze a esponente naturale, abbiamo che per ogni $x, y \geq 0$ e $n, m \in \mathbb{N}$ non nulli risulta

- $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[m]{x} = \sqrt[nm]{x^{n+m}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[nm]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$
- $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$

Inoltre

- se $0 < x < y$ allora $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$
- per $n < m$, se $x \in (0, 1)$ allora $\sqrt[n]{x} < \sqrt[m]{x}$, mentre se $x \in (1, +\infty)$ risulta $\sqrt[n]{x} > \sqrt[m]{x}$

Possiamo riscrivere le precedenti proprietà utilizzando la **notazione frazionaria** $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Per ogni $x, y \geq 0$ e $n, m \in \mathbb{N}$ non nulli, abbiamo

■ $x^{\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = (x^{n+m})^{\frac{1}{nm}}$

■ $(x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{n \cdot m}} = (x^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}}$

■ $(xy)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}}$

■ se $0 < x < y$ allora $x^{\frac{1}{n}} < y^{\frac{1}{n}}$;

■ per $n < m$, se $x \in (0, 1)$ allora $x^{\frac{1}{n}} < x^{\frac{1}{m}}$, mentre se $x \in (1, +\infty)$ si ha $x^{\frac{1}{n}} > x^{\frac{1}{m}}$.

► Per $x \geq 0$ abbiamo

$$\sqrt[5]{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}} = \sqrt[5]{2 \cdot 3 \sqrt{x^{2+3}}} = \sqrt[5]{6 \sqrt{x^5}} = \sqrt[6]{5 \sqrt{x^5}} = \sqrt[6]{x}$$

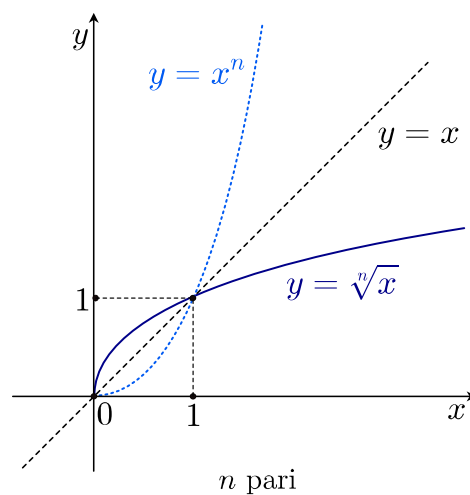
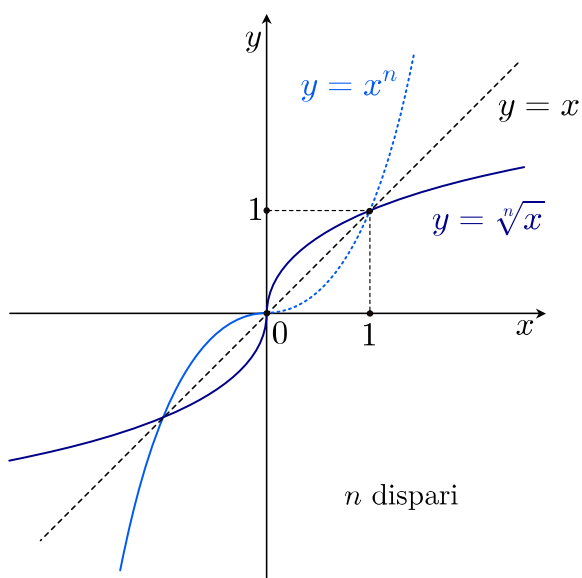
in alternativa, usando la notazione frazionaria,

$$\sqrt[5]{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}} = \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, consideriamo la funzione $p_{\frac{1}{n}}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.
Abbiamo

- **DOMINIO:** $\text{Dom}(p_{\frac{1}{n}}) = \text{Im}(p_n) = \mathbb{R}$ se n è dispari,
 $\text{Dom}(p_{\frac{1}{n}}) = \text{Im}(p_n|_{[0,+\infty)}) = [0, +\infty)$ se n è pari, $n \neq 0$;
- **IMMAGINE:** $\text{Im}(p_{\frac{1}{n}}) = \text{Dom}(p_n) = \mathbb{R}$ se n è dispari,
 $\text{Im}(p_{\frac{1}{n}}) = \text{Dom}(p_n|_{[0,+\infty)}) = [0, +\infty)$ se n è pari, $n \neq 0$;
- **SIMMETRIE:** $p_{\frac{1}{n}}(x)$ è funzione dispari se n è dispari;
- **MONOTONIA:** $p_{\frac{1}{n}}(x)$ è strettamente crescente nel suo dominio;
- **CONFRONTO:** se $0 < n < m$ allora $p_{\frac{1}{n}}(x) < p_{\frac{1}{m}}(x)$ per $x \in (0, 1)$,
mentre $p_{\frac{1}{n}}(x) > p_{\frac{1}{m}}(x)$ per $x \in (1, +\infty)$.

Dalla definizione data, $p_{\frac{1}{n}}(x)$ è la **funzione inversa** della funzione $p_n(x) = x^n$ se n è dispari, della funzione $p_n(x) = x^n$ ristretta a $[0, +\infty)$ se n è pari. Il grafico della funzione $p_{\frac{1}{n}}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ è quindi il **simmetrico rispetto alla bisettrice** $y = x$ del grafico di $p_n(x) = x^n$



POTENZE a ESPONENTE RAZIONALE

Dato ora $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ non nullo, definiamo la **potenza a esponente razionale** x^q come

$$x^q = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ per cui le precedenti espressioni risultano definite.

- ▶ $x^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{x^5}$ risulta definita in ogni $x \in \mathbb{R}$;
- ▶ $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$ è definita solo per $x \geq 0$, visto che $x^3 \geq 0$ solo per $x \geq 0$;
- ▶ $x^{-\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{x^{-7}}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$;
- ▶ $x^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{x^{-3}}$ è definita solo per $x > 0$, essendo $x^{-3} \geq 0$ solo per $x > 0$.

NOTA: per generici $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, la potenza $x^{\frac{m}{n}}$ risulta definita solo per $x > 0$, anche se per particolari valori di n e m potrà risultare definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si può inoltre provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}$ e $x > 0$ risulta

$$\sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \Leftrightarrow (x^m)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Dalla definizione e dalle proprietà delle potenze ad esponente intero e dei radicali, per ogni $x > 0$ e $q, r \in \mathbb{Q}$ abbiamo

- $x^q \cdot x^r = x^{q+r}$
- $(x^q)^r = x^{q \cdot r}$
- $(xy)^q = x^q \cdot y^q$
- se $0 < x < y$ allora $x^q < y^q$ se $q > 0$ mentre $x^q > y^q$ se $q < 0$
- se $q < r$ allora $x^q > x^r$ per $x \in (0, 1)$, mentre $x^q < x^r$ per $x \in (1, +\infty)$.

Preso $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ non nullo, consideriamo la corrispondente **funzione potenza ad esponente razionale** definita da $p_{\frac{m}{n}}(x) = x^{\frac{m}{n}}$ per ogni $x > 0$ e osserviamo che risulta $p_{\frac{m}{n}}(x) = p_{\frac{1}{n}}(p_m(x))$ per ogni $x > 0$.

Per generici $q, r \in \mathbb{Q}$ non nulli si ha

- **DOMINIO:** $\text{Dom}(p_q) = (0, +\infty)$;
- **IMMAGINE:** $\text{Im}(p_q) = (0, +\infty)$;
- **MONOTONIA:** $p_q(x)$ è strettamente crescente in $(0, +\infty)$ se $q > 0$, strettamente decrescente in $(0, +\infty)$ se $q < 0$;
- **CONFRONTO:** se $q < r$ allora $p_q(x) > p_r(x)$ per $x \in (0, 1)$, $p_q(x) < p_r(x)$ per $x \in (1, +\infty)$

NOTA: Per ogni $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ non nullo e $x, y > 0$ risulta

$$y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{y^n}$$

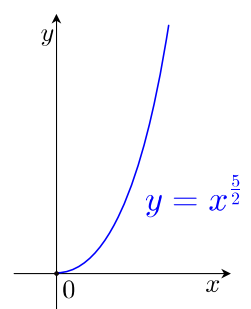
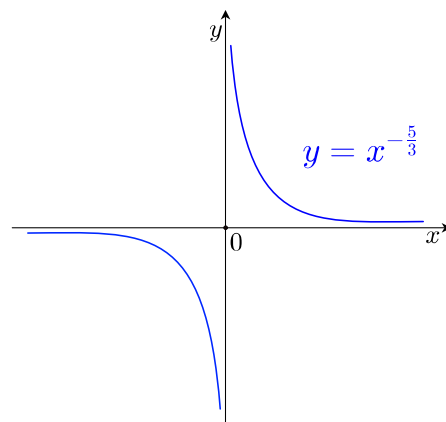
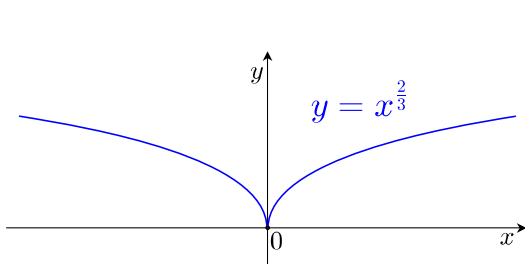
e dunque che la funzione $p_{\frac{n}{m}}(x) = x^{\frac{n}{m}}$ è la **funzione inversa** di $p_{\frac{m}{n}}(x) = x^{\frac{m}{n}}$ in $(0, +\infty)$.

NOTA: Per generici $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z}$, $x^{\frac{p}{n}}$ risulta definito solo per $x > 0$, avremo quindi che in generale la funzione $p_q(x) = x^q$ con $q \in \mathbb{Q}$ risulta definita in $(0, +\infty)$ ma per particolari $q \in \mathbb{Q}$ potrà risultare definita anche in ogni $x \in \mathbb{R}$.

- ▶ $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ risulta definito in ogni $x \in \mathbb{R}$, potremo quindi prendere come dominio della funzione $p_{\frac{2}{3}}(x)$ tutto \mathbb{R} ;
- ▶ $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$ è definito solo per $x \geq 0$, prenderemo come dominio di $p_{\frac{3}{2}}(x)$ l'intervallo $[0, +\infty)$;
- ▶ $x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ è definito in ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, avremo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ come dominio di $p_{-\frac{2}{3}}(x)$;
- ▶ $x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ risulta definito solo per $x > 0$, la funzione $p_{-\frac{2}{3}}(x)$ avrà come dominio $(0, +\infty)$.

Dalle proprietà di simmetria delle funzioni $p_n(x) = x^m$ e $p_{\frac{1}{n}}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ non nullo, avremo in alcuni casi corrispondenti proprietà di simmetria delle funzioni $p_{\frac{m}{n}}(x)$.

- ▶ La funzione $p_{\frac{2}{3}}(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ è definita in \mathbb{R} ed è pari
- ▶ La funzione $p_{-\frac{5}{3}}(x) = x^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed è dispari.
- ▶ La funzione $p_{\frac{5}{2}}(x) = x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x^5}$ è definita in $[0, +\infty)$ e non presenta simmetrie (dato che nemmeno il dominio risulta simmetrico).



A partire dalla definizione di potenza ad esponente razionale, utilizzando l'assioma di completezza dei numeri reali, si può definire la potenza ad esponente irrazionale di un numero reale positivo, come ad esempio il numero $2^{\sqrt{2}}$.

Preso un numero irrazionale $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la **potenza di base x ed esponente irrazionale α** , x^α per $\alpha > 0$ e $x > 1$ è definita come l'unico elemento separatore degli insiemi

$$\mathcal{A}_\alpha = \{x^q \mid q \in \mathbb{Q}, q < \alpha\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_\alpha = \{x^q \mid q \in \mathbb{Q}, q \geq \alpha\}.$$

mentre per $0 < x < 1$ come l'unico elemento separatore degli insiemi

$$\mathcal{A}_\alpha = \{x^q \mid q \in \mathbb{Q}, q > \alpha\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_\alpha = \{x^q \mid q \in \mathbb{Q}, q \leq \alpha\}.$$

Si pone poi $1^\alpha = 1$ e $0^\alpha = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$. Infine, se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $\alpha < 0$ si pone per definizione $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$ per ogni $x > 0$.

Dalla definizione data si può provare che le proprietà delle potenze ad esponente razionale continuano a valere anche per le potenze ad esponente irrazionale. Abbiamo quindi che per ogni $x, y > 0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono

■ $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$

■ $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

■ $(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$

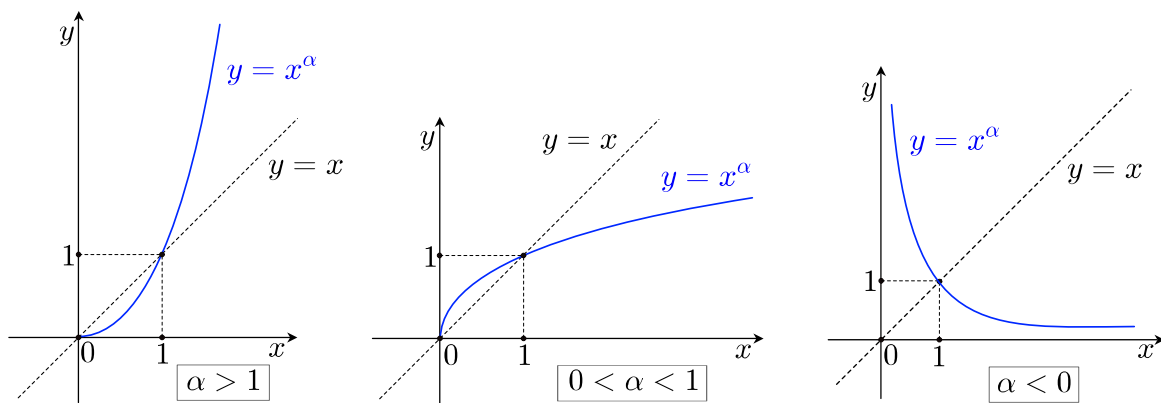
■ se $0 < x < y$ allora $x^\alpha < y^\alpha$ se $\alpha > 0$ mentre $x^\alpha > y^\alpha$ se $\alpha < 0$

■ se $\alpha < \beta$ allora $x^\alpha > x^\beta$ per $x \in (0, 1)$ e $x^\alpha < x^\beta$ per $x \in (1, +\infty)$

NOTA: Abbiamo che $y = x^\alpha \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{\alpha}}$

Dato $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e considerata la corrispondente **funzione potenza a esponente irrazionale** $p_\alpha(x) = x^\alpha$ per ogni $x > 0$, risulta

- **DOMINIO:** $\text{Dom}(p_\alpha) = (0, +\infty)$;
- **IMMAGINE:** $\text{Im}(p_\alpha) = (0, +\infty)$;
- **MONOTONIA:** $p_\alpha(x)$ è strettamente crescente in $(0, +\infty)$ se $\alpha > 0$, strettamente decrescente in $(0, +\infty)$ se $\alpha < 0$;
- **CONFRONTO:** se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha < \beta$ allora $p_\alpha(x) > p_\beta(x)$ per $x \in (0, 1)$, mentre $p_\alpha(x) < p_\beta(x)$ per $x \in (1, +\infty)$.



NOTA: il grafico di $p_\alpha(x) = x^\alpha$ per $x > 1$ si svolge al di sopra della bisettrice $y = x$ se $\alpha > 1$, al di sotto se invece $0 < \alpha < 1$.

EQUAZIONI e DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Quando in un'equazione o disequazione la variabile compare nell'argomento di radici, siamo in presenza di un'**equazione o disequazione irrazionale**. Per risolverle occorre innanzitutto tenere presente che in presenza di radici di indice pari bisogna imporre che il radicando sia maggiore o uguale a zero.

Quindi, per *eliminare* le radici, si potrà elevare a potenza e utilizzare le **leggi di cancellazione**

$$\boxed{(\sqrt[n]{x})^n = x} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \geq 0 \text{ se } n \text{ è pari} \\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ se } n \text{ è dispari} \end{array} \right.$$

tenendo presente le proprietà di iniettività e di monotonia dalle corrispondenti funzioni.

Vediamo come risolvere alcune tipologie di equazioni e disequazioni irrazionali *elementari* a cui occorrerà cercare di ricondursi anche nei casi più complessi.

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ pari non nullo}$$

L'equazione è definita per $a(x) \geq 0$. Se $b(x) < 0$ l'equazione non ammette soluzioni, se invece $b(x) \geq 0$, allora si può elevare alla potenza n , ottenendo

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) = (b(x))^n \end{cases}$$

NOTA: la condizione $a(x) \geq 0$ può essere omessa in quanto è conseguenza della terza, dato che se n è pari allora $(b(x))^n \geq 0$.

- ▶ L'equazione $\sqrt{x+2} = x$ ammette come unica soluzione $x = 2$.
- ▶ L'equazione $\sqrt{x+2} = 2 - \sqrt{x}$ ammette come unica soluzione $x = \frac{1}{4}$.

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ **dispari**}$$

La radice è di indice dispari, quindi non occorre studiare il segno del radicando, né il segno del termine a destra, dato che la potenza di esponente dispari è definita e bijectiva in tutto \mathbb{R} . Elevando alla potenza n , se n è dispari si ottiene

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \Leftrightarrow a(x) = (b(x))^n$$

- ▶ L'equazione $\sqrt[3]{x-3} = -2$ ammette come unica soluzione $x = -5$
- ▶ L'equazione $\sqrt{x+1} = \sqrt[3]{x-1}$ non ammette soluzioni reali.

■ $\sqrt[n]{a(x)} < b(x)$ con $n \in \mathbb{N}$ **pari** non nullo

Occorre innanzitutto imporre la condizione di esistenza $a(x) \geq 0$. Prima di elevare alla potenza n , è necessario studiare il segno del termine $b(x)$: se $b(x) < 0$ la disequazione non ha soluzioni, mentre se $b(x) \geq 0$, allora si può elevare alla potenza n conservando la disequaglianza.

Pertanto se n è pari risulta

$$\sqrt[n]{a(x)} < b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) < (b(x))^n \end{cases}$$

- ▶ La disequazione $\sqrt{x+1} < x-1$ ammette come soluzione ogni $x > 3$.
- ▶ La disequazione $x \geq \sqrt{2-x}$ risulta verificata da ogni $1 \leq x \leq 2$.

$$\sqrt[n]{a(x)} > b(x) \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ pari non nullo}$$

Anche in questo caso occorre innanzitutto imporre la condizione $a(x) \geq 0$. Se $b(x) < 0$ allora la disequazione è automaticamente soddisfatta. Invece, se $b(x) \geq 0$, allora si può elevare alla potenza n conservando la disuguaglianza.

$$\sqrt[n]{a(x)} > b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \leq 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} a(x) > 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) > (b(x))^{2n} \end{cases}$$

NOTA: Nel secondo sistema la condizione $a(x) \geq 0$ può essere omessa essendo conseguenza della terza.

- ▶ La disequazione $x - 1 \leq \sqrt{2 - x}$ risulta verificata da ogni $x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- ▶ La disequazione $\sqrt[4]{x^4 - 3x^2 + 2} > x$ è verificata per $x \leq -\sqrt{2}$ oppure $-1 \leq x < \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$$\sqrt[n]{a(x)} > b(x) \quad \text{oppure} \quad \sqrt[n]{a(x)} < b(x) \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \text{ **dispari**}$$

In questo caso non è necessario discutere il segno del radicando $a(x)$ per determinare il dominio, né il segno del termine $b(x)$, essendo la potenza di esponente dispari definita e strettamente crescente in tutto \mathbb{R} .

Possiamo quindi elevare alla potenza n ottenendo

$$\sqrt[n]{a(x)} > b(x) \Leftrightarrow a(x) > (b(x))^n \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{a(x)} < b(x) \Leftrightarrow a(x) < (b(x))^n$$

- ▶ La disequazione $\sqrt[3]{x^3 - 2} < x + 1$ è sempre verificata.
- ▶ La disequazione $x \geq \sqrt[3]{2 - x}$ risulta verificata da ogni $x \geq 1$.

ESPONENZIALI e LOGARITMI

Fissato $a > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo definito il numero a^x , che diremo **esponenziale in base a di x** .

Dalla definizione, per ogni $a > 0$ abbiamo che $a^0 = 1$ e $a^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
Dalle proprietà delle potenze, per ogni $a, b > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$ otteniamo

■ $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

■ $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

■ $(a^x)^y = a^{xy}$

■ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

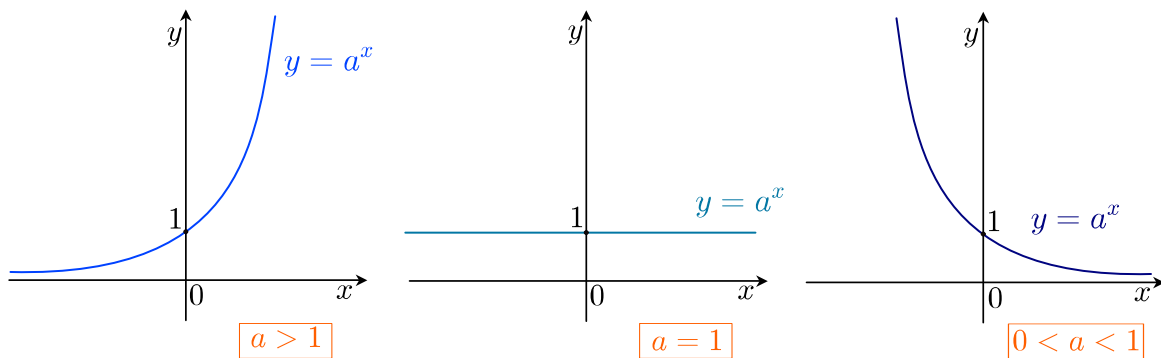
■ $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

■ se $x < y$ allora $a^x > a^y$ per $0 < a < 1$ mentre $a^x < a^y$ per $a > 1$;

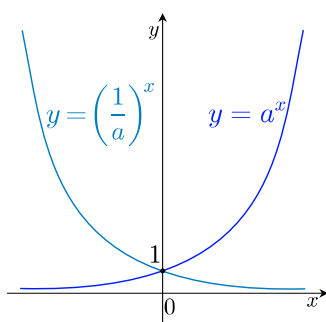
■ per $0 < a < b$ allora $a^x < b^x$ se $x > 0$ mentre $a^x > b^x$ se $x < 0$.

Per ogni $a > 0$ si definisce la **funzione esponenziale in base a** $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come la funzione che associa a ogni $x \in \mathbb{R}$ il valore a^x , $\exp_a(x) = a^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Abbiamo

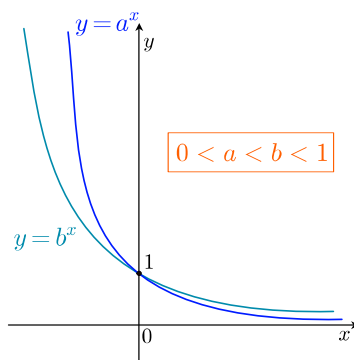
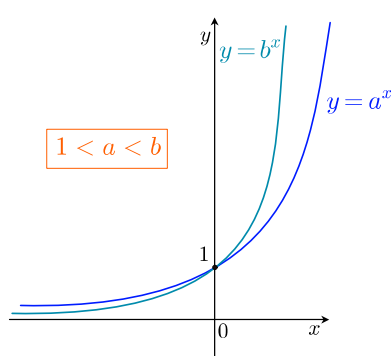
- **DOMINIO:** $\text{Dom}(\exp_a) = \mathbb{R}$ per ogni $a > 0$;
- **IMMAGINE:** $\text{Im}(\exp_a) = (0, +\infty)$ se $a > 0$, $a \neq 1$;
- **MONOTONIA:** $\exp_a(x)$ è strettamente crescente in \mathbb{R} se $a > 1$, è strettamente decrescente in \mathbb{R} se $0 < a < 1$, è costante se $a = 1$,



NOTA: Per ogni $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$ risulta $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$. I grafici di $\exp_a(x)$ e $\exp_{\frac{1}{a}}(x)$ sono quindi simmetrici rispetto all'asse delle ordinate.



■ **CONFRONTO:** se $0 < a < b$ allora $\exp_a(x) < \exp_b(x)$ per $x > 0$ mentre $\exp_a(x) > \exp_b(x)$ per $x < 0$.



La funzione esponenziale $\exp_a(x)$ con $a > 0$ e $a \neq 1$, risulta iniettiva in tutto il suo dominio. Abbiamo quindi che per ogni $y \in \text{Im}(\exp_a) = (0, +\infty)$ esiste un unico $x \in \mathbb{R}$ tale che $\exp_a(x) = a^x = y$. Per definizione poniamo $x = \log_a y$, che diremo **logaritmo in base a di y** . Abbiamo allora

$$y \in (0, +\infty), \quad \log_a y = x \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}, \quad a^x = y$$

Valgono le **leggi di cancellazione**

$$\log_a(a^x) = x \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ e } a^{\log_a x} = x \text{ per ogni } x \in (0, +\infty)$$

- ▶ Risulta $3 = 2^{\log_2 3} = \log_2(2^3)$ e $-2 = \log_3(3^{-2})$ ma $-2 \neq 3^{\log_3(-2)}$!!
- ▶ Dalle proprietà dell'esponenziale e dalle leggi di cancellazione si ha

$$2^{3-\log_2 5} = 2^3 \cdot 2^{-\log_2 5} = 8 \cdot \frac{1}{2^{\log_2 5}} = \frac{8}{5}.$$

Dalla definizione e dalle proprietà della funzione esponenziale, per ogni $a > 0$, $a \neq 1$, e $x, y > 0$ abbiamo che $\log_a 1 = 0$ e che

■ $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

■ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

■ $\log_a(x^\alpha) = \alpha \cdot \log_a x$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

■ $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$

■ se $0 < x < y$ allora $\log_a x > \log_a y$ per $0 < a < 1$ mentre $\log_a x < \log_a y$ per $a > 1$

■ se $0 < a < b$ e $a, b \neq 1$ allora $\log_a x > \log_b x$ per $x > 1$ mentre $\log_a x < \log_b x$ per $0 < x < 1$.

NOTA: le prime due identità valgono solo se $x > 0$ e $y > 0$, ma $\log_a(xy)$ e $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$ risultano definiti anche quando $x < 0$ e $y < 0$.

Dalle leggi di cancellazione e dalle precedenti proprietà otteniamo le seguenti formule che ci permettono di effettuare **cambiamenti di base** per esponenziali e logaritmi. Per ogni $a, b > 0$, $a, b \neq 1$ si ha

■ $a^x = b^{x \log_b a}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

■ $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ per ogni $x > 0$.

In particolare vale $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, che ci permette di riscrivere la seconda delle formule date sopra come

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \text{per ogni } x > 0$$

► Abbiamo $2^x = 3^{x \log_3 2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ mentre

$$\log_2 x = \log_2 3 \cdot \log_3 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 2}$$

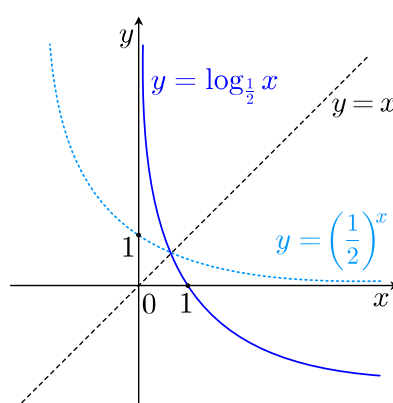
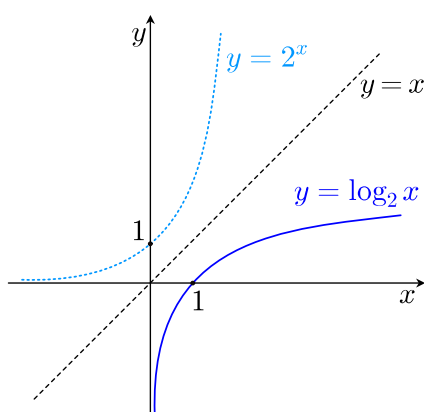
per ogni $x > 0$.

Per $a > 0$, $a \neq 1$, la **funzione logaritmica in base a** , $\log_a : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ che associa a ogni $x > 0$ il logaritmo $\log_a x$, è la funzione inversa della funzione esponenziale: $\log_a(x) = \exp_a^{-1}(x)$, per ogni $x > 0$

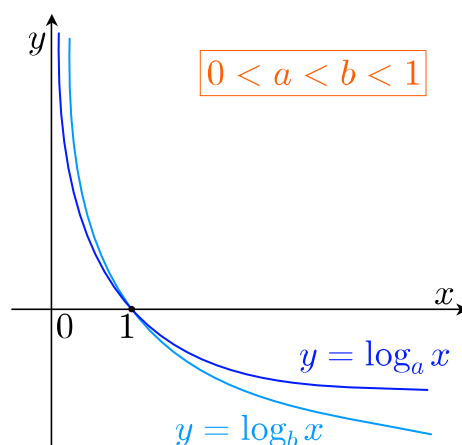
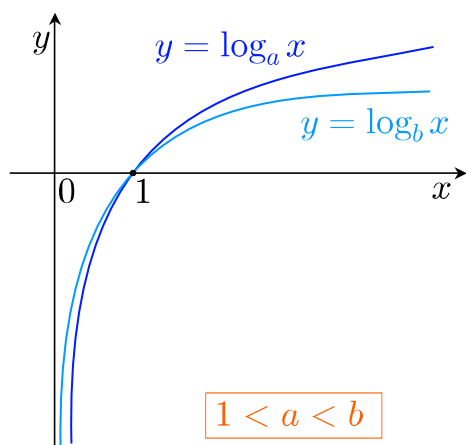
Per ogni $a > 0$, $a \neq 1$, abbiamo

- **DOMINIO:** $\text{Dom}(\log_a) = \text{Im}(\exp_a) = (0, +\infty)$;
- **IMMAGINE:** $\text{Im}(\log_a) = \text{Dom}(\exp_a) = \mathbb{R}$;
- **MONOTONIA:** $\log_a(x)$ è strettamente crescente se $a > 1$, è strettamente decrescente se $0 < a < 1$.

Il grafico della funzione $\log_a(x)$ è il simmetrico del grafico della funzione $\exp_a(x)$ rispetto alla bisettrice $y = x$.



- **CONFRONTO:** se $0 < a < b$, $a, b \neq 1$ allora $\log_a x > \log_b x$ per $x > 1$ mentre $\log_a x < \log_b x$ per $0 < x < 1$.



La basi usualmente utilizzate per esponenziale e logaritmo sono la base 10 e il numero irrazionale $e = 2,718281\dots$, detto **numero di Nepero**.

Le notazioni usate sono $\boxed{\text{Log } x}$ per il logaritmo di base 10 e $\boxed{\ln x}$ per il logaritmo di base e , quest'ultimo detto anche **logaritmo naturale**.

NOTA: I matematici usano spesso $\boxed{\log x}$ per indicare il logaritmo naturale.

FUNZIONI IPERBOLICHE

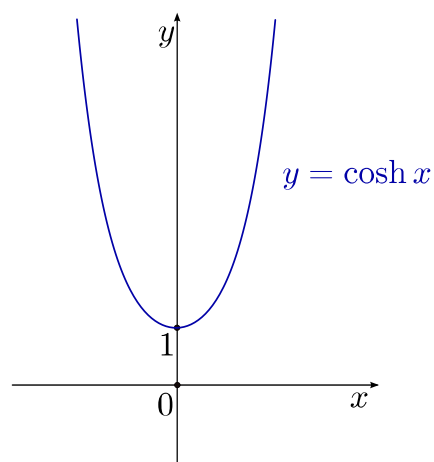
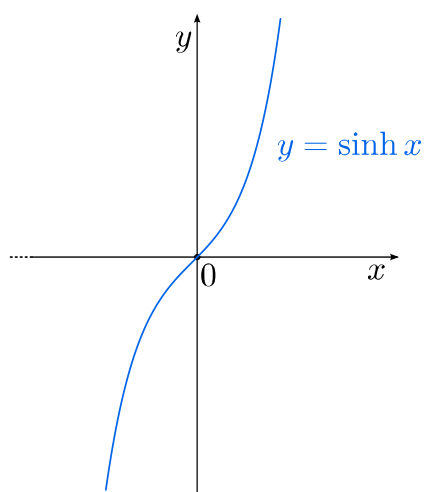
Sono definite a partire dalla funzione esponenziale e^x le funzioni

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

dette rispettivamente **seno e coseno iperbolico**.

Si può provare che

- **DOMINIO**: $\text{Dom}(\sinh x) = \text{Dom}(\cosh x) = \mathbb{R}$,
- **IMMAGINE**: $\text{Im}(\sinh x) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(\cosh x) = [1, +\infty)$,
- **SIMMETRIE**: $\sinh x$ è funzione dispari, $\cosh x$ è funzione pari,
- **MONOTONIA**: $\sinh x$ è funzione strettamente crescente in \mathbb{R} , $\cosh x$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$, strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$.



È immediato inoltre provare che vale l'identità

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

ovvero che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, il punto di coordinate $(\cosh \alpha, \sinh \alpha)$ appartiene all'*iperbole equilatera* $x^2 - y^2 = 1$, da cui il nome delle due funzioni iperboliche.

Osserviamo che $\sinh x$ risulta invertibile in \mathbb{R} , la sua funzione inversa è detta **settore seno iperbolico** e viene denotata con **settsinh x** :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \text{settsinh } x = y \quad \Leftrightarrow \quad y \in \mathbb{R}, \quad \sinh y = x$$

Abbiamo allora

- $\text{Dom}(\text{settsinh } x) = \text{Im}(\sinh x) = \mathbb{R}$,
- $\text{Im}(\text{settsinh } x) = \text{Dom}(\sinh x) = \mathbb{R}$.

Si ha inoltre

$$\text{settsinh } x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Difatti, posto $y = \text{settsinh } x$ risulta

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Osservato che $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ mentre $e^y > 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, ne deduciamo che

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

La funzione $\cosh x$ risulta invece invertibile se considerata ristretta all'intervallo $[0, +\infty)$, la sua funzione inversa è detta **settore coseno iperbolico** e viene denotata con **settcosh x** :

$$x \geq 0, \quad \text{settcosh } x = y \quad \Leftrightarrow \quad y \geq 1, \quad \cosh y = x$$

Abbiamo

- $\text{Dom}(\text{settcosh } x) = \text{Im}(\cosh x) = [1, +\infty)$,
- $\text{Im}(\text{settcosh } x) = \text{Dom}(\cosh x) = [0, +\infty)$.

Procedendo come sopra, si può inoltre provare che risulta

$$\text{settcosh } x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{per ogni } x \geq 1$$

EQUAZIONI e DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Le **equazioni e disequazioni esponenziali** sono equazione e disequazione in cui compaiono funzioni esponenziali. Vediamo il caso di equazioni e disequazioni esponenziali *elementari*, a cui occorrerà cercare di ricondursi anche nei casi più complessi grazie alle proprietà degli esponenziali.

$$a^{f(x)} = k \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

Dato che l'esponenziale assume solo valori positivi, l'equazione non ha soluzioni se $k \leq 0$. Se $k > 0$ allora possiamo applicare il logaritmo in base a . Quindi

$$a^{f(x)} = k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{se } k > 0 \rightsquigarrow f(x) = \log_a k \\ \text{se } k \leq 0 \rightsquigarrow \text{nessuna soluzione.} \end{cases}$$

- ▶ L'equazione $3^{2x+1} = 2$ è equivalente a $2x + 1 = \log_3 2$ che ammette come soluzione $x = \frac{1}{2}(\log_3 2 - 1)$.
- ▶ L'equazione $e^{x^2} = \frac{1}{2e^x}$ è equivalente a $e^{x^2+x} = \frac{1}{2}$ e dunque a $x^2 + x + \log 2 = 0$. Tale equazione non ammette soluzioni dato che $\Delta = 1 - 4 \log 2 < 0$.

$$a^{f(x)} > k \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

Dato che l'esponenziale assume solo valori positivi, se $k \leq 0$ la disequazione è sempre verificata (in tutto il dominio di $f(x)$). Invece, se $k > 0$ si può applicare il logaritmo in base a . Dunque

$$a^{f(x)} > k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{se } k \leq 0 \rightsquigarrow \text{ verificata da ogni } x \in \text{Dom}(f) \\ \text{se } k > 0 \rightsquigarrow \begin{cases} f(x) > \log_a k, & \text{se } a > 1 \\ f(x) < \log_a k, & \text{se } a < 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$a^{f(x)} < k \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

Se $k \leq 0$ la disequazione non ammette soluzioni, se invece $k > 0$ possiamo applicare il logaritmo in base a , quindi

$$a^{f(x)} < k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{se } k \leq 0 \rightsquigarrow \text{ nessuna soluzione} \\ \text{se } k > 0 \rightsquigarrow \begin{cases} f(x) < \log_a k & \text{se } a > 1 \\ f(x) > \log_a k & \text{se } a < 1. \end{cases} \end{cases}$$

- ▶ La disequazione $8^{x^2} \geq 2 \cdot 2^{x^2}$ si può riscrivere come $2^{3x^2} \geq 2^{x^2+1}$ ovvero come $2^{2x^2-1} \geq 1$. Risulta quindi equivalente a $2x^2 - 1 \geq 0$, che risulta verificata da ogni $|x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- ▶ La disequazione $2^{x+1} - 1 < 2^{-x}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dalle proprietà degli esponenziali la disequazione si può riscrivere come $2 \cdot 2^x - 1 < \frac{1}{2^x}$ e quindi come

$$2 \cdot 2^{2x} - 2^x - 1 < 0$$

Posto $t = 2^x$, otteniamo la disequazione $2t^2 - t - 1 < 0$ che è risolta se $-\frac{1}{2} < t < 1$. La disequazione $-\frac{1}{2} < 2^x$ è sempre verificata, mentre $2^x < 1$ è soddisfatta se $x < 0$. La soluzione della disequazione iniziale è quindi $x < 0$.

- ▶ La disequazione $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1$ risulta verificata da ogni $x \in \mathbb{R}$.

EQUAZIONI e DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Proseguiamo con alcuni esempi di equazioni e disequazioni logaritmiche *elementari* a cui cercheremo nuovamente di ricondurci anche nei casi più complicati utilizzando le proprietà dei logaritmi .

$$\log_a(f(x)) = k \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

L'equazione è definita se $f(x) > 0$. Per tali valori è possibile applicare la funzione esponenziale a^x ottenendo l'equazione equivalente $f(x) = a^k$

$$\log_a(f(x)) = k \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{f(x) > 0} \\ f(x) = a^k \end{cases}$$

- L'equazione $\log_2(x - 2) + \log_2 x = 3$ è definita se $x - 2 > 0$ e $x > 0$, cioè se $x > 2$. Applicando le proprietà dei logaritmi possiamo scrivere $\log_2(x - 2) + \log_2 x = \log_2(x^2 - 2x)$ e quindi

$$\begin{aligned} \log_2(x^2 - 2x) = 3 &\Leftrightarrow x^2 - 2x = 2^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \text{ oppure } x = 4 \end{aligned}$$

ma solo $x = 4$ è accettabile dato che $x = -2$ non verifica $x > 2$.

$$\log_a(f(x)) < k \text{ e } \log_a(f(x)) > k \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

Dopo aver imposto la condizione di esistenza $f(x) > 0$, si può applicare la funzione esponenziale di base a , mantenendo il verso della disuguaglianza se $a > 1$, invertendolo se $0 < a < 1$. Quindi se $a > 1$ abbiamo

$$\log_a(f(x)) < k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^k \end{cases} \quad \text{e} \quad \log_a(f(x)) > k \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{f(x) > 0} \\ f(x) > a^k \end{cases}$$

mentre se $0 < a < 1$ si ha

$$\log_a(f(x)) < k \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{f(x) > 0} \\ f(x) > a^k \end{cases} \quad \text{e} \quad \log_a(f(x)) > k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^k \end{cases}$$

- La disequazione $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(2-x) < \log_{\frac{1}{3}} x$ è definita se $x+1 > 0$, $2-x > 0$ e $x > 0$, cioè se $0 < x < 2$. Applicando le proprietà dei logaritmi otteniamo

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{2-x} < \log_{\frac{1}{3}} x &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ \frac{x+1}{2-x} > x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x^2 - x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 2 \end{aligned}$$

- La disequazione $\frac{1}{2} \log_4 x < \log_2 3$ è definita per $x > 0$. Applicando la formula di cambiamento di base e le proprietà dei logaritmi si ottiene

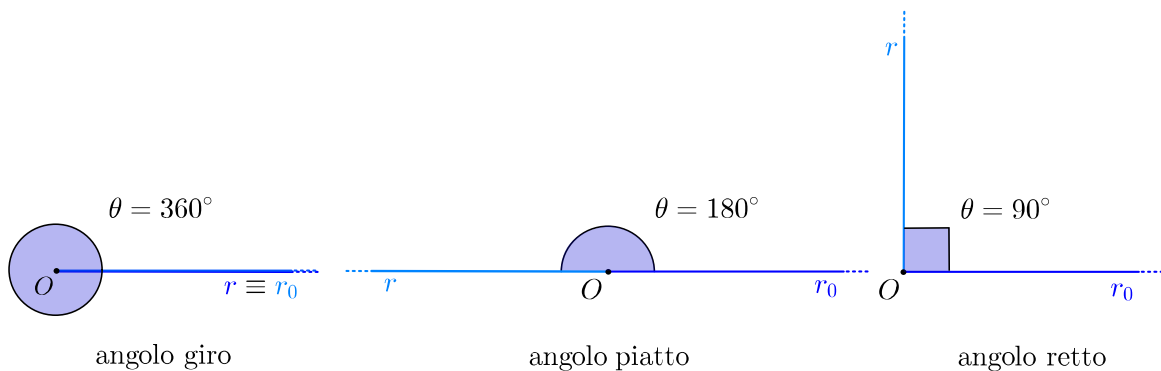
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_4 x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} < \log_2 3 &\Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot \log_2 x < \log_2 3 \Leftrightarrow \log_2 \sqrt[4]{x} < \log_2 3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt[4]{x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 81 \end{aligned}$$

ANGOLI e RADIANTI

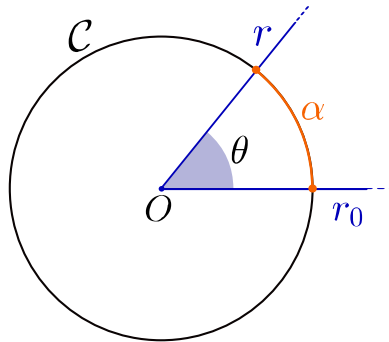
Si dice **angolo** una regione del piano individuata da due semirette r_0 e r uscenti dal medesimo punto O . Le semirette r_0 e r , sono dette **lati** dell'angolo e O **vertice** dell'angolo.

Si dice **angolo giro** l'angolo, non vuoto, individuato da due semirette coincidenti, $r \equiv r_0$. Per convenzione, la misura di un angolo giro è uguale a 360 **gradi**, 360° . Un **grado** è quindi l'ampiezza di un angolo uguale alla 360-esima parte di un angolo giro.

L'ampiezza di un **angolo piatto**, individuato dalle semirette r_0 e r allineate ma opposte sarà quindi di 180° , essendo la metà di un angolo giro, mentre un **angolo retto**, pari a un quarto di angolo giro, ha ampiezza 90° .



Sia \mathcal{C} una circonferenza di raggio 1 e centro O . All'angolo θ individuato dalle due semirette r_0 e r uscenti da O corrisponderà un arco sulla circonferenza di lunghezza α . Diremo che l'angolo θ misura α **radianti**.



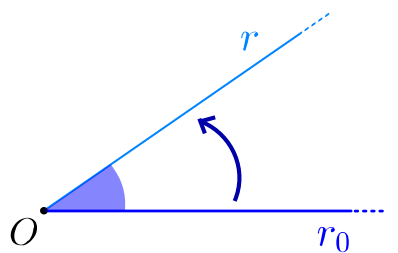
Dato che π è il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro, abbiamo che la circonferenza \mathcal{C} ha lunghezza 2π . Quindi un angolo giro misurerà 2π radianti, un angolo piatto π radianti e un angolo retto $\frac{\pi}{2}$ radianti

$$\alpha \text{ rad} : \beta^\circ = \pi \text{ rad} : 180^\circ$$

- Un angolo di 45° misura $\frac{\pi}{4}$ radianti, essendo $45^\circ = \frac{180^\circ}{4}$, mentre un angolo di $\frac{\pi}{9}$ radianti misura 20° dato che $20^\circ = \frac{180^\circ}{9}$.

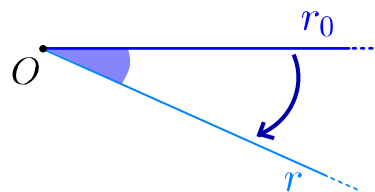
ANGOLI ORIENTATI

Fissata come semiretta di riferimento la semiretta r_0 , si dice che l'angolo di lati le semirette r_0 e r e vertice O è **positivamente orientato** (rispettivamente, **negativamente orientato**) se per sovrapporsi alla semiretta r coprendo l'angolo assegnato, la semiretta r_0 deve ruotare in senso antiorario (rispettivamente, in senso orario).



positivamente orientato

negativamente orientato



La misura di un angolo orientato verrà indicata con segno positivo se l'angolo risulta positivamente orientato, negativo se l'angolo è negativamente orientato.

COSENO, SENO e TANGENTE

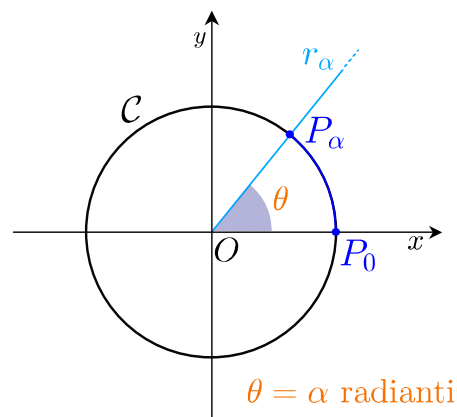
Nel piano cartesiano Oxy , considerata la **circonferenza trigonometrica** \mathcal{C} di centro l'origine O e raggio 1, indichiamo con P_0 il punto di coordinate $(1, 0) \in \mathcal{C}$.

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia P_α il punto della circonferenza \mathcal{C} tale che l'arco $\widehat{P_0P_\alpha}$ abbia lunghezza $|\alpha|$, dove si conviene che

- partendo dal punto P_0 , l'arco $\widehat{P_0P_\alpha}$ viene percorso in senso antiorario se $\alpha \geq 0$ e in senso orario se $\alpha < 0$,
- se $|\alpha| > 2\pi$ il punto P_α viene individuato percorrendo k volte l'intera circonferenza trigonometrica e quindi un arco di lunghezza β dove $k \in \mathbb{N}$ e $\beta \in [0, 2\pi)$ sono tali che $|\alpha| = \beta + 2k\pi$.

Osserviamo che

- se $|\alpha| \leq 2\pi$, la semiretta r_α uscente dall'origine e passante per il corrispondente punto P_α individua con il semiasse delle ascisse positive un **angolo orientato** che misura α radianti.

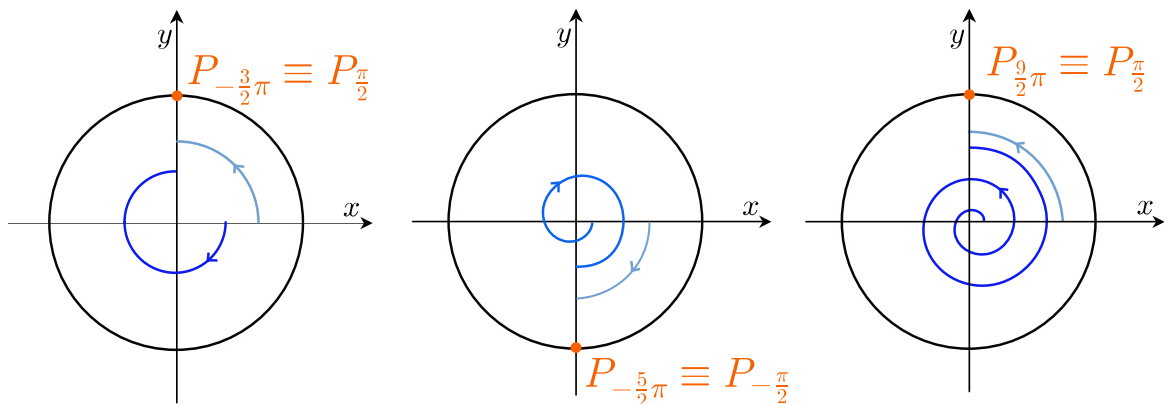


- dato che la circonferenza \mathcal{C} misura 2π , abbiamo che se $\beta = \alpha + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, i corrispondenti punti P_α e P_β coincidono:

$$\boxed{P_{\alpha+2k\pi} = P_\alpha} \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z} \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}$$

Ad esempio

- ▶ $P_{-\frac{3}{2}\pi} = P_{\frac{\pi}{2}} = (0, 1)$ poiché $-\frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2} - 2\pi$,
- ▶ $P_{-\frac{5}{2}\pi} = P_{-\frac{\pi}{2}} = (0, -1)$ dato che $-\frac{5}{2}\pi = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$,
- ▶ $P_{\frac{9}{2}\pi} = P_{\frac{\pi}{2}} = (0, 1)$ essendo $\frac{9}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + 4\pi$.



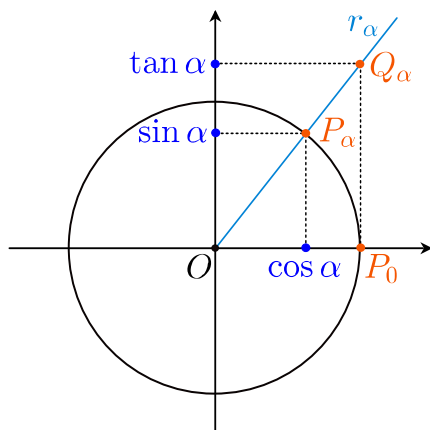
Si dicono **coseno** e **seno** di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$, rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del corrispondente punto P_α sulla circonferenza trigonometrica:

$$P_\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

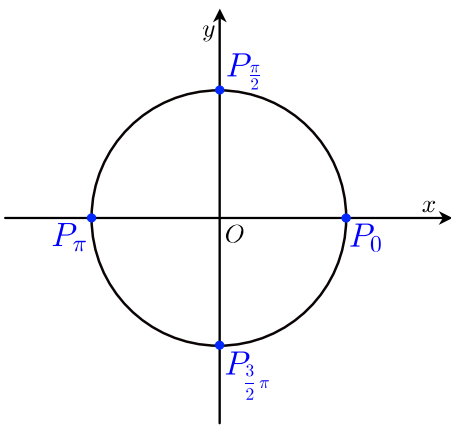
Per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si dice **tangente** di α , $\tan \alpha$, il rapporto

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

NOTA: $\tan \alpha$ è il coefficiente angolare della semiretta r_α e risulta uguale all'ordinata del punto Q_α di intersezione di r_α con la retta $x = 1$

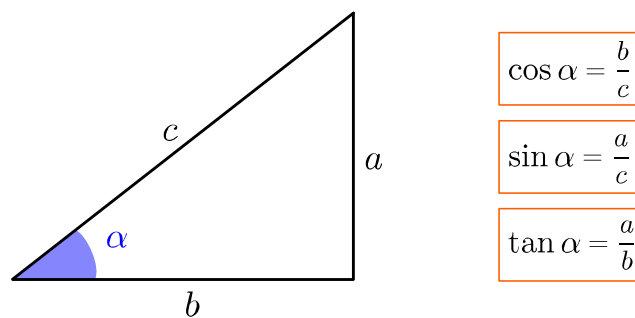


Dalla definizione segue immediatamente che



- $P_0 = (1, 0)$ quindi $\cos 0 = 1$ e $\sin 0 = 0$
- $P_{\frac{\pi}{2}} = (0, 1)$ da cui $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\sin \frac{\pi}{2} = 1$
- $P_{\pi} = (-1, 0)$ dunque $\cos \pi = -1$ e $\sin \pi = 0$
- $P_{\frac{3}{2}\pi} = (0, -1)$ pertanto $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$ e $\sin \frac{3}{2}\pi = -1$

Dato un triangolo rettangolo di cateti a e b e ipotenusa c , indicata con α la misura in radianti dell'angolo opposto al cateto a risulta

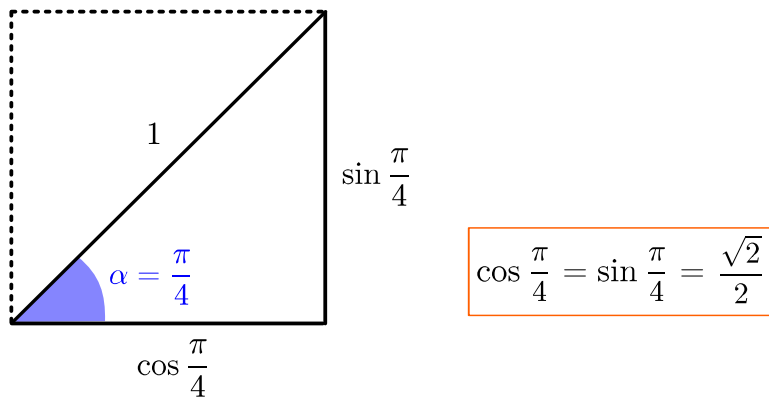


$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

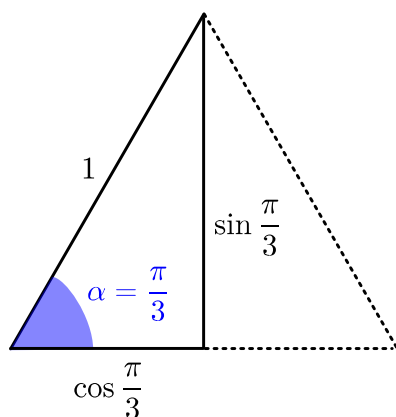
$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

Ne deduciamo in particolare che, essendo $\cos \frac{\pi}{4}$ e $\sin \frac{\pi}{4}$ i cateti di un triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa 1, si ha



$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

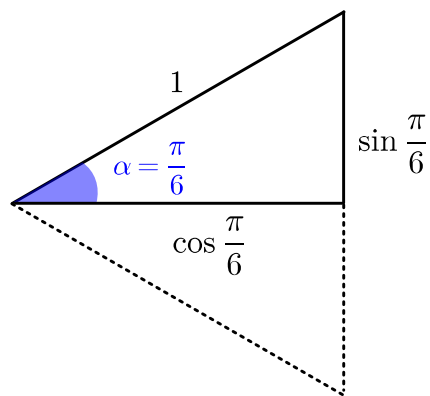
Dato che un triangolo rettangolo di ipotenusa 1 con un angolo acuto di $\frac{\pi}{3}$ radianti è la metà di un triangolo equilatero, dal teorema di Pitagora si ha



$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Allo stesso modo, poiché $\frac{\pi}{6}$ è la metà di $\frac{\pi}{3}$ abbiamo

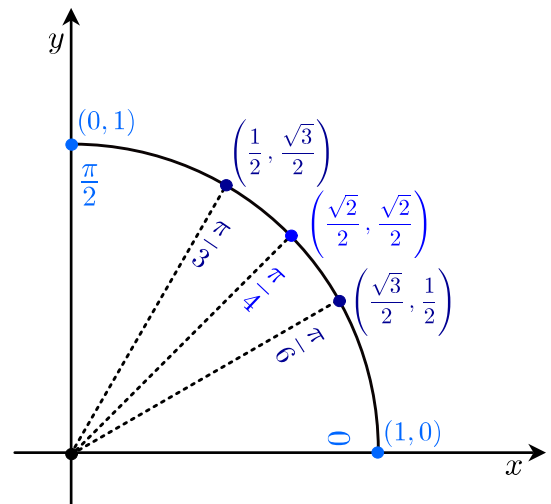


$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Riunendo quanto trovato, otteniamo la seguente tabella che riporta i valori di coseno, seno e tangente degli **angoli fondamentali**

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\notin



Ricordando che l'equazione della circonferenza trigonometrica \mathcal{C} è $x^2 + y^2 = 1$, dalla definizione, essendo $P_\alpha \in \mathcal{C}$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo

■ **Identità Pitagorica:** $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

■ $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ e $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$

■ $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$ e $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$

■ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ e $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

■ **Identità degli angoli supplementari:**

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ e $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

■ **Identità degli angoli complementari:**

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ e $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$

Infine, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti formule

■ Formule di addizione

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

■ Formule di sottrazione

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Ponendo $\alpha = \beta$ nelle formule di addizione otteniamo

■ Formule di duplicazione

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Dalle formule di duplicazione, grazie all'identità pitagorica, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\cos(2\beta) = 1 - 2 \sin^2 \beta = 2 \cos^2 \beta - 1$$

da cui seguono

■ Formule di bisezione

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

■ Formule di razionalizzazione: se $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ allora

$$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$$

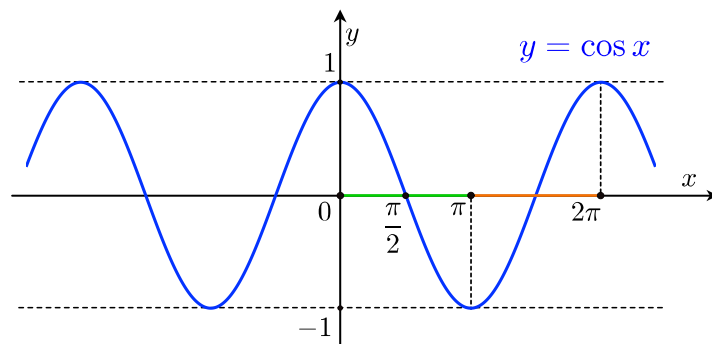
FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Considerate le corrispondenti **funzioni coseno**, **seno** e **tangente** abbiamo

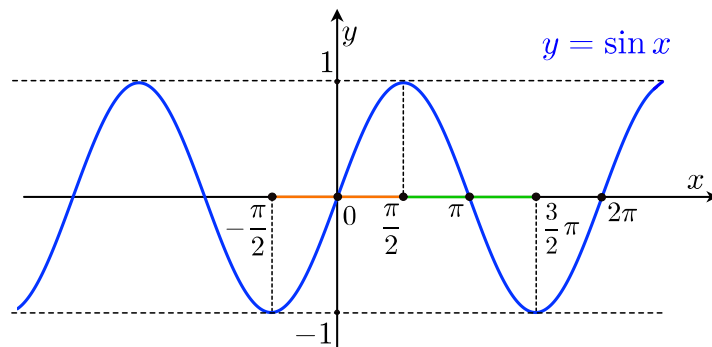
- **DOMINIO**: $\text{Dom}(\cos x) = \text{Dom}(\sin x) = \mathbb{R}$ mentre $\text{Dom}(\tan x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
- **IMMAGINE**: $\text{Im}(\cos x) = \text{Im}(\sin x) = [-1, 1]$ e $\text{Im}(\tan x) = \mathbb{R}$;
- **SIMMETRIE**: $\cos x$ è funzione pari, $\sin x$ e $\tan x$ sono funzioni dispari;
- **PERIODICITÀ**: $\cos x$ e $\sin x$ sono funzioni periodiche di periodo 2π , $\tan x$ è una funzione periodica di periodo π .

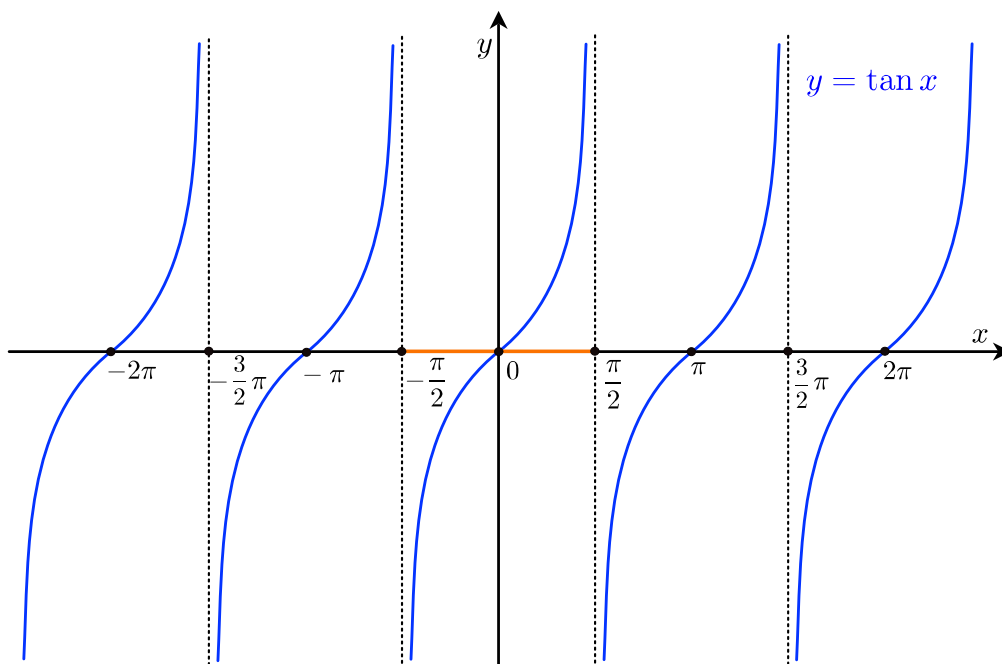
Riguardo alle proprietà di **MONOTONIA** delle funzioni trigonometriche, limitandoci a considerare un **intervallo fondamentale** avente come ampiezza il periodo, abbiamo

- $\cos x$ è strettamente decrescente in $[0, \pi]$, crescente in $[\pi, 2\pi]$;
- $\sin x$ è strettamente crescente in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$;
- $\tan x$ è strettamente crescente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.



Dall'identità degli angoli complementari, $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: il grafico del seno si ottiene dal grafico del coseno operando una traslazione di vettore $\vec{v} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.





FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

Le funzioni **arcocoseno**, $\arccos x$, **arcoseno**, $\arcsin x$, e **arcotangente**, $\arctan x$, sono definite rispettivamente come le inverse delle funzioni $\cos x$ ristretta all'intervallo $[0, \pi]$, $\sin x$ ristretta a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\tan x$ ristretta a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Osservato che $\cos([0, \pi]) = \sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ e $\tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$, si ha

- $x \in [-1, 1]$, $\arccos x = y \Leftrightarrow y \in [0, \pi], \cos y = x$
- $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x = y \Leftrightarrow y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \sin y = x$
- $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x = y \Leftrightarrow y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \tan y = x$

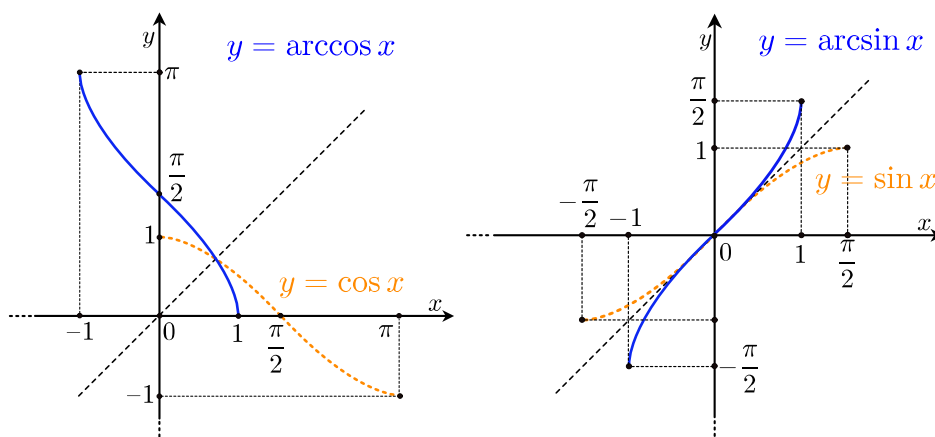
Ad esempio

- ▶ Abbiamo che $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ dato che $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$ e $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
- ▶ Si ha $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ essendo $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- ▶ Risulta $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ dato che $-\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$.

Abbiamo

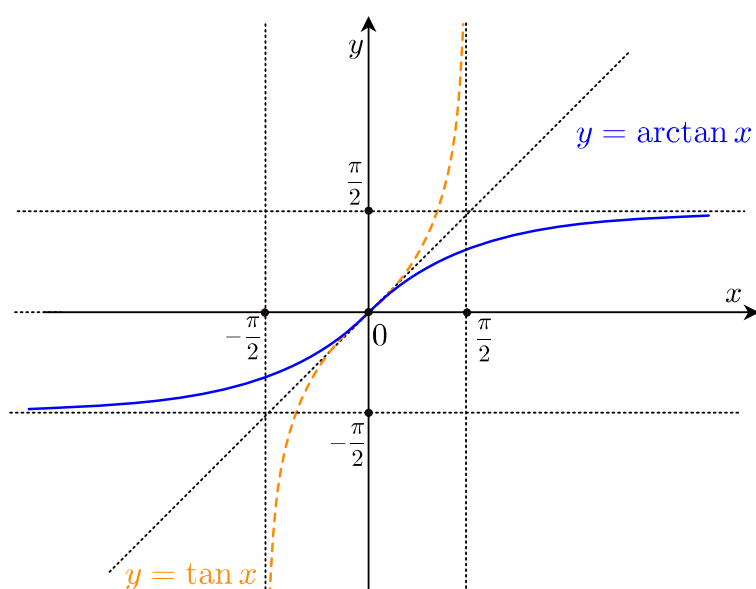
- $\text{Dom}(\arccos) = \cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ e $\text{Im}(\arccos) = [0, \pi]$;
- $\text{Dom}(\arcsin) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = [-1, 1]$ e $\text{Im}(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\text{Dom}(\arctan) = \tan\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(\arctan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Il grafico delle funzioni $\arccos x$ e $\arcsin x$ risulta rispettivamente il simmetrico rispetto alla bisettrice $y = x$ delle funzioni $\cos x$, ristretta a $[0, \pi]$, e $\sin x$, ristretta a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



NOTA: la funzione $\arcsin x$ è dispari e, dall'identità degli angoli complementari, si ha $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in [-1, 1]$.

Il grafico della funzione arcontangente risulta invece il simmetrico alla bisettrice $y = x$ del grafico della funzione $\tan x$, ristretta a $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



NOTA: la funzione $\arctan x$ è dispari, strettamente crescente e assume valori strettamente compresi tra -1 e 1 .

EQUAZIONI e DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

Parliamo di **equazioni e disequazioni trigonometriche** quando nell'equazioni e disequazioni compaiono funzioni trigonometriche.

Per risolvere tali equazioni e disequazioni occorre tener presente che le funzioni seno e coseno sono **periodiche di periodo 2π** , mentre la funzione tangente è **periodica di periodo π** .

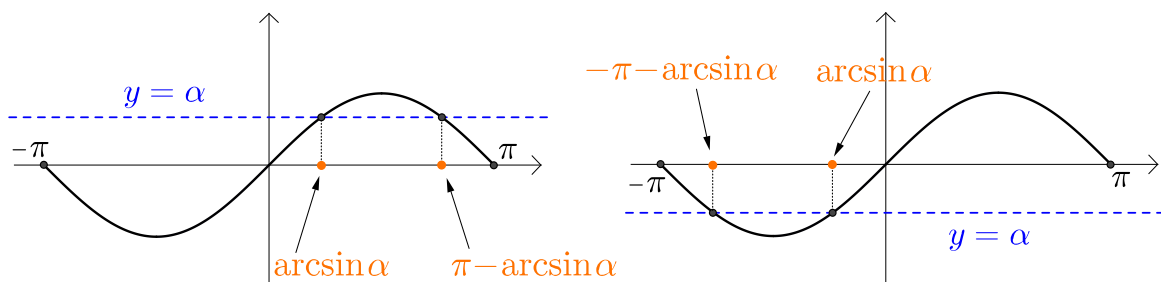
Per risolvere un'equazione o disequazione trigonometrica converrà iniziare col **restringere** lo studio in un intervallo di ampiezza il periodo (in generale 2π , oppure π se è coinvolta solo la funzione tangente).

Una volta determinate le eventuali soluzioni in tale intervallo, si otterrà la soluzione in tutto \mathbb{R} aggiungendo, per periodicità, **multipli interi del periodo**.

Vedremo innanzitutto equazioni e disequazioni *elementari*, per risolverle ragioneremo per **via grafica**, tracciando il grafico delle funzioni coinvolte in un intervallo di ampiezza il periodo.

$$\sin x = \alpha \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

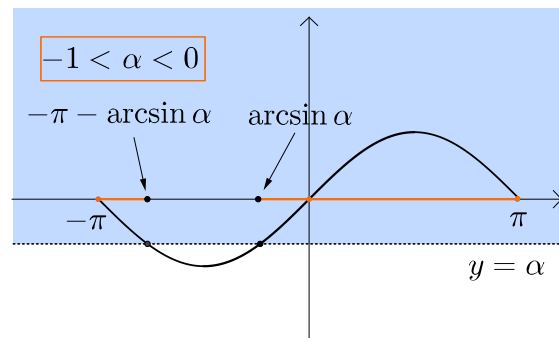
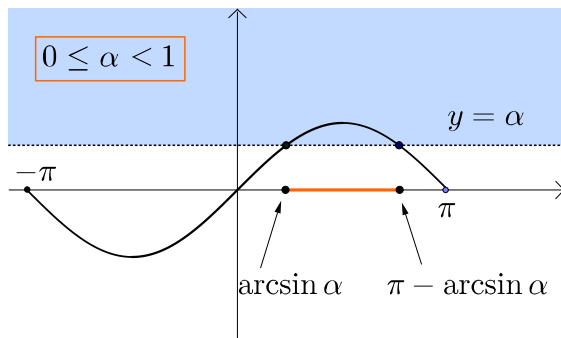
Osserviamo che l'equazione non ha soluzioni se $|\alpha| > 1$. Per $|\alpha| \leq 1$ ogni retta $y = \alpha$ interseca il grafico del seno nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ in due punti di ascissa $\arcsin \alpha$ il primo e $\pm\pi - \arcsin \alpha$ il secondo.



- ▶ L'equazione $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è verificata da $\frac{\pi}{4}$ e $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$. Per periodicità tutte le soluzioni reali sono date da $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ e $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- ▶ $\sin x = -\frac{1}{3}$ in $[-\pi, \pi]$ è verificata da $x = \arcsin(-\frac{1}{3}) = -\arcsin \frac{1}{3}$ e $x = -\pi + \arcsin \frac{1}{3}$.

$$\sin x > \alpha \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

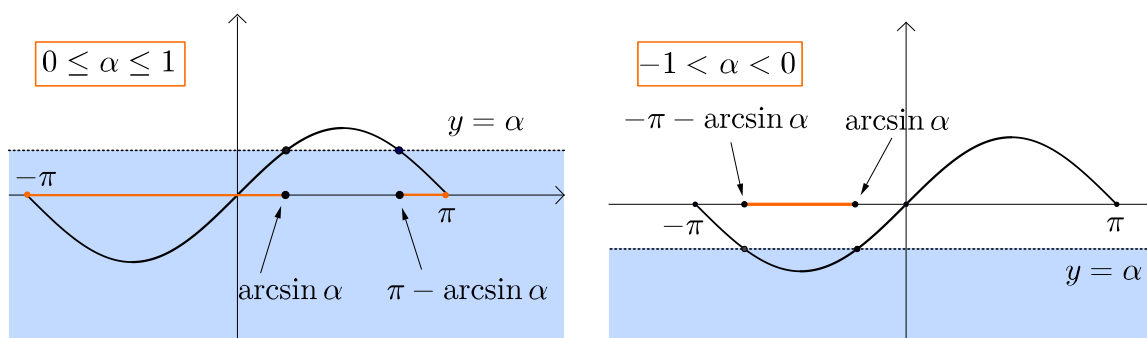
Possiamo tracciare il grafico della funzione seno in $[-\pi, \pi]$ e osservare in quali intervalli questo si trova al di sopra della retta $y = \alpha$.



- ▶ La disequazione $\sin x > 2$ non ammette soluzioni mentre $\sin x > -\pi$ è verificata da ogni $x \in \mathbb{R}$.
- ▶ La disequazione $\sin x > \frac{1}{2}$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è verificata da $\frac{\pi}{6} < x < \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$. Per periodicità tutte le soluzioni reali sono date da $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin x < \alpha \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

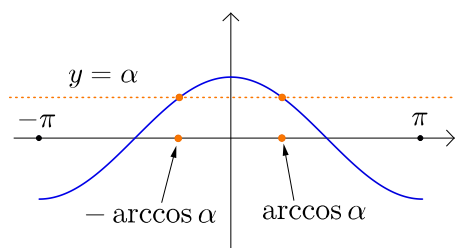
Tracciamo il grafico della funzione seno in $[-\pi, \pi]$ e osserviamo in quali intervalli questo si trova al di sotto della retta $y = \alpha$.



- ▶ La disequazione $\sin x < \frac{\pi}{2}$ è verificata da ogni $x \in \mathbb{R}$.
- ▶ La disequazione $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è verificata da $-\pi < x < \frac{\pi}{3}$ e $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi < x < \pi$. Per periodicità tutte le soluzioni reali sono date da $-\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

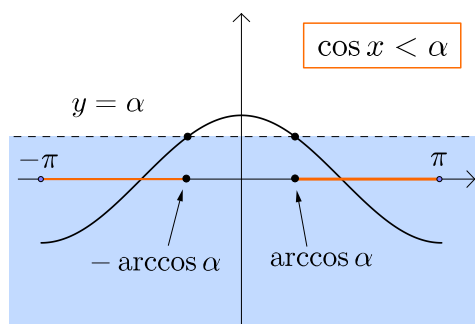
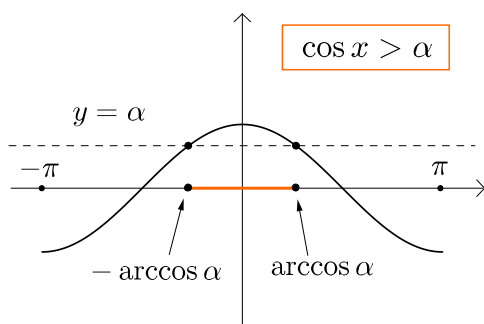
$$\cos x = \alpha \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

L'equazione non ha soluzioni se $|\alpha| > 1$ mentre per $|\alpha| \leq 1$ ogni retta $y = \alpha$ interseca il grafico del coseno in due punti simmetrici rispetto all'origine (coincidenti se $\alpha = 1$) di ascissa $\arccos \alpha$ e $-\arccos \alpha$



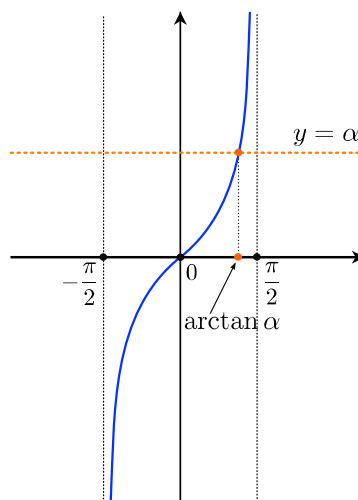
$$\cos x > \alpha \text{ oppure } \cos x < \alpha \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Anche in questo caso, possiamo tracciare il grafico della funzione coseno in $[-\pi, \pi]$ e la retta $y = \alpha$ e ragionare graficamente



$\tan x = \alpha$, $\tan x > \alpha$ oppure $\tan x < \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

In questo caso possiamo restringere lo studio all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dove la funzione tangente risulta è strettamente crescente



- ▶ L'equazione $\tan x = 1$ nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è verificata da $x = \frac{\pi}{4}$, le soluzioni reali saranno quindi $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- ▶ La disequazione $\tan x > -2$ nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è verificata da $\arctan(-2) = -\arctan 2 < x < \frac{\pi}{2}$, le soluzioni reali saranno quindi date da $k\pi - \arctan 2 < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- ▶ L'equazione $\cos(2x) - \sin x = 0$, ricordando che $\cos(2x) = 1 - \sin^2 x$, risulta equivalente a $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, equazione algebrica nella variabile $t = \sin x$, che ammette come soluzioni ogni $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- ▶ L'equazione $\sin x + \cos x = 1$ può essere ricondotta all'equazione razionale $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$ ponendo $t = \tan \frac{x}{2}$, per $x \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Ammette come soluzioni ogni $x = 2k\pi$ e $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- ▶ La disequazione $\sqrt{1 - \cos x} \leq |\sin x|$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ ammette come soluzioni ogni $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- ▶ La disequazione $\log(\sin x) + \log(\cos x) + 2 \log 2 > 0$ dalle proprietà del logaritmo, risulta equivalente a $\log(4 \sin x \cos x) > 0$ per $\sin x > 0$ e $\cos x > 0$, ammette come soluzioni ogni $\frac{\pi}{12} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.