Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Prova scritta di Matematica 1 del 20 febbraio 2018 (A)

1) Mostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sin(x)} - \frac{4}{x} & 0 < x < 1, \\ 0 & x = 0, \\ \frac{2}{x} - \frac{2-x}{\log(1+x)} & -1 < x < 0, \end{cases}$$

risulta continua e derivabile in $x_0 = 0$.

Possibile svolgimento: f è continua in $x_0 = 0$ se e solo se $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, cioè, essendo $f(0) = 0$, se e solo se

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x} - \frac{2-x}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4}{\sin(x)} - \frac{4}{x} = 0.$$

Essendo noto che $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \to 0$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x} - \frac{2-x}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\log(1+x) - 2x + x^2}{x\log(1+x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)} = 0.$$

Analogamente, essendo $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4}{\sin(x)} - \frac{4}{x} \lim_{x\to 0^+} \frac{4x - 4\sin(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)} = 0,$$

che ci permette di concludere come si voleva che la funzione f è continua in $x_0 = 0$. Per mostrare che la funzione f è derivabile in $x_0 = 0$ consideriamo il rapporto incrementale di f in $x_0 = 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} \frac{1}{x}(\frac{4}{\sin(x)} - \frac{4}{x}) & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x}(\frac{2}{x} - \frac{2-x}{\log(1+x)}) & -1 < x < 0. \end{cases}$$

Notando ancora che $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \to 0$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}(\frac{2}{x} - \frac{2-x}{\log(1+x)}) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}(\frac{2\log(1+x) - 2x + x^2}{x\log(1+x)}) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{2}{3}.$$

Analogamente, essendo $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}(\frac{4}{\sin(x)} - \frac{4}{x}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(\frac{4x - 4\sin(x)}{x\sin(x)}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{2}{3}.$$

Cio' ci permette di concludere che $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{2}{3}$ e che dunque la funzione f è derivabile in $x_0=0$ con $f'(0)=\frac{2}{3}$.

2) Determinare per $\alpha>0$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\mathrm{e}^{\alpha(x-2)}|x-2|=1.$$

Possibile svolgimento: Poniamo $t=\alpha(x-2)$. Osserviamo che per $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione proposta se e solo se $t=\alpha(x-2)$ è una soluzione dell'equazione

$$\mathrm{e}^t|t|=\alpha.$$

Per determinare il numero di soluzioni di tale ultima equazione consideriamo la funzione

$$f(t)=\mathrm{e}^t|t|=\begin{cases}\mathrm{e}^t t & t\geq 0,\\ -\mathrm{e}^t t & t<0.\end{cases}$$

Si ha che $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è continua su $\mathbb{R}$ e derivabile su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ con

$$f'(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^t(t+1) & t>0\\ -\mathrm{e}^t(t+1) & t<0.\end{cases}$$

(In particolare essendo $f'(t)\to\pm 1$ per $t\to 0^{\pm}$ la funzione presenta in $t_0=0$ un punto angoloso con $D_{\pm}f(0)=\pm 1$.)
Si ha $f(t)>0$ per ogni $t\neq 0$ e $f(0)=0$. Inoltre

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^t t=+\infty \text{ e (per gerarchia) }\lim_{t\to-\infty}f(t)=\lim_{t\to+\infty}-\mathrm{e}^t t=0.$$

Se $t>0$ si ha $f'(t)=\mathrm{e}^t(t+1)>0$ risultando che la funzione f è strettamente crescente e in particolare iniettiva su $[0,+\infty)$. Visto che $f(0)=0$, $\lim_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$ e f è continua su $\mathbb{R}$, il teorema dei valori intermedi ci assicura che per ogni $\alpha>0$ esiste almeno un $t>0$ per il quale $f(t)=\alpha$. Essendo come visto f iniettiva su $[0,+\infty)$ tale t è unico.

Se $t<0$ (risp. >0) si ha $f'(t)=-\mathrm{e}^t(t+1)>0$ (risp. >0) se e solo se $t+1<0$ (risp. <0) se e solo se $t<-1$ (resp. $-1<t<0$). Dunque f è strettamente crescente su $(-\infty,-1]$ e strettamente decrescente su $[-1,0]$ presentando un punto di massimo assoluto in $(-\infty,0]$ in $t_m=-1$ ove $f(-1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$. Se dunque $\alpha>\frac{1}{\mathrm{e}}$ la equazione $f(t)=\alpha$ non presenta soluzioni $t<0$. Se $\alpha=\frac{1}{\mathrm{e}}$ la equazione $f(t)=\alpha$ ammette come unica soluzione negativa t_m. Se $0<\alpha<\frac{1}{\mathrm{e}}$, usando come sopra il teorema dei valori intermedi e le proprietà di monotonia di f, concludiamo che la equazione $f(t)=\alpha$ presenta due soluzioni $t_1\in(-\infty,t_m)$ e $t_2\in(t_m,0)$.

Dalle considerazioni sopra svolte possiamo concludere che l'equazione proposta presenta una sola soluzione per $\alpha>\frac{1}{\mathrm{e}}$, due soluzioni per $\alpha=\frac{1}{\mathrm{e}}$ e tre soluzioni per $\alpha\in(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$.

3) Determinare per $\alpha > 0$ il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha \log n}{2^n}.$$

Possibile svolgimento: Posto $a_n = \frac{n^\alpha \log n}{2^n}$ notiamo che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha > 0$. Essendo che per ogni $\alpha > 0$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (\frac{n+1}{n})^\alpha (\frac{\log(n+1)}{\log(n)}) \frac{2^n}{2^{n+1}} = (1 + \frac{1}{n})^\alpha (1 + \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log(n)}) \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} < 1 \text{ per } n \to +\infty,$$

dal criterio del rapporto la serie proposta risulta convergente per ogni $\alpha > 0$.

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Prova scritta di Matematica 1 del 20 febbraio 2018 (B)

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ____

1) Determinare per quali α, $\beta \in \mathbb{R}$ risulta derivabile in $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{1+\alpha x}}{x} & x > 0 \\ \\ 1 - \sin \beta x & x \leq 0. \end{cases}$$

2) Determinare per $\alpha > 0$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$|x - 1| = \mathrm{e}^{\alpha(x-1)}.$$

3) Determinare per $\alpha > 0$ il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha 2^n}{n!}.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Prova scritta di Matematica 1 del 20 febbraio 2018 (C)

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ____

1) Determinare $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos(x)} - \cos(\frac{x}{\sqrt{2}})}{\log(1+\frac{x}{12})(\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2})}$

2) Determinare per $\alpha > 0$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\log|x| = \alpha x.$$

3) Determinare per $\alpha > 0$ il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^\alpha n!}.$$