1)Dopo aver determinato il dominio della funzione

$$y(x) = \ln(e^x - x)$$

determinarne eventuali asintoti e il numero di soluzioni dell'equazione

$$\ln(e^x - x) = k$$

al variare del parametro reale k.

Svolgimento.

Per l'esistenza del logaritmo, deve essere $e^x - x > 0$. Studiamo la derivata della funzione

$$g(x) = e^x - x \quad \to g'(x) = e^x - 1$$

Si ha:

- $g'(x) < 0$ per $x < 0$
- $g'(x) = 0$ per $x = 0$
- $g'(x) > 0$ per $x > 0$

La funzione $g(x)$ è quindi strettamente decrescente per $x < 0$ e strettamente crescente per $x > 0$. Per $x = 0$ ha un minimo assoluto. Si ha inoltre $g(0) = 1 > 0$, ed essendo il minimo della funzione, questa è sempre positiva.

Il dominio di $y(x)$ è quindi $\mathbb{R}$.

Inoltre $y(x)$ è continua in quanto composizione di funzioni continue, e non ha quindi asintoti verticali.

Lo studio del suo comportamento a $\pm\infty$ ci permette di verificare la presenza di asintoti orizzontali e/o obliqui. Poichè, a $+\infty$, l'ordine di infintio della funzione esponenziale è maggiore dell'ordine di infinito di una funzione polinomiale, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(e^x - x) = [\ln(+\infty - \infty)] = [\ln(+\infty)] = +\infty$$

inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(e^x - x) = [\ln(0 - (-\infty))] = [\ln(+\infty)] = +\infty$$

La funzione non ha asintoti orizzontali nè a destra nè a sinistra.

Asintoto obliquo a destra

Sfruttando le proprietà del logaritmo e raccogliendo e^x:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln e^x + \ln(1 - x/e^x)}{x}) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \ln(1 - x/e^x)}{x}) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\ln(1 - x/e^x)}{x} = [1 + 0/\infty] = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^x - x) - x = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^x - x) - \ln e^x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{e^x - x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \ln(1 - x/e^x) = [\ln(1 - 0)] = 0$$

La funzione ha la retta $y = x$ come asintoto destro.

Asintoto obliquo a sinistra

Sfruttando il fatto che, a $+\infty$, l'ordine di infinito del logaritmo è più basso dell'ordine di infinito un polinomio si ottiene

$$m = \lim_{x\to-\infty} \ln(e^x - x)/x = \left[\frac{\ln(0 - (-\infty))}{-\infty}\right] =$$

$$= \left[\frac{\ln(+\infty)}{-\infty}\right] = 0$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} \ln(e^x - x) - 0 = [\ln(0 + \infty)] = +\infty \notin \mathbb{R}$$

La funzione non ha asintoti obliqui a sinistra.

Crescenza e decrescenza

Poichè il logaritmo è funzione strettamente crescente, per quanto riguarda la crescenza o decrescenza la funzione $y(x)$ ha lo stesso comportamento della funzione $g(x)$ precedentemente studiata.

La funzione $y(x)$ ha quindi un minimo assoluto in $x = 0$, da cui

$$y_{\min} = y(0) = \ln(1 - 0) = 0$$

Inoltre la funzione tende a $+\infty$ sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$. Perciò l'equazione nel tema ha

- Nessuna soluzione per $k < 0$
- Una soluzione per $k = 0$
- Due soluzioni (una negativa ed una positiva) per $k > 0$

Il grafico della funzione, pur non essendo richiesto dal tema, è visualizzabile link.

2) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi/2} x \sin^2 x \mathrm{d}x$$

Calcoliamo preliminarmente il relativo integrale indefinito, e osserviamo anche che per la formula di bisezione del seno si ha

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Abbiamo quindi

$$\int x\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\mathrm{d}x$$

Il primo integrale è immediato, per il secondo si procede per parti scegliendo x come fattore finito

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\left(x\frac{\sin 2x}{2}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2x}{4} - \frac{1}{8}\cos 2x + k$$

Sostituendo $x = 0$ e $x = \pi/2$ si ottiene

$$\int_0^{\pi/2} x\sin^2 x\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi^2}{16} - 0 + \frac{1}{8}\right) - \left(0 - 0 - \frac{1}{8}\right) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$$