• $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,dx$. Posto $t = \sqrt{x}$ e quindi $x = t^2$ e $dx = 2tdt$, integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int \arctan\sqrt{x}\,dx &= \int 2t\arctan t dt = t^2\arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2}dt \\ &= t^2\arctan t - t + \arctan t + c \\ &= x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + c\end{aligned}$$

Vediamo ora l'esempio notevole di integrazione delle funzioni razionali.

Data una funzione razionale $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ polinomio di grado m e $Q(x)$ polinomio di grado n, osserviamo che se $m \geq n$ è possibile decomporre $R(x)$ nella forma:

$$R(x) = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

dove il polinomio $P_0(x)$ è detto parte intera di $R(x)$ e $P_1(x)$ è polinomio di grado $m_1 < n$. Considereremo quindi nel seguito solo funzioni razionali $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dove $m < n$. Per quanto riguarda la determinazione di una primitiva di una funzione razionale iniziamo a considerare il caso in cui

$$R(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c}.$$

La tecnica di integrazione di tali funzioni risulta differente a seconda del segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4c$.

• $\Delta > 0$. In questo caso, dette x_1 e x_2 le due radici reali distinte del polinomio $x^2 + bx + c$, potremo scrivere $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$ e si determinano due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}.$$

Avremo allora

$$\begin{aligned}\int \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c}dx &= \int \frac{A}{x - x_1}dx + \int \frac{B}{x - x_2}dx \\ &= A\log|x - x_1| + B\log|x - x_2| + c.\end{aligned}$$

Vediamo un esempio.

$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$. Abbiamo $\Delta = 9 > 0$ e $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$. Cerchiamo allora due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1} = \frac{(A + B)x + 2B - A}{(x + 2)(x - 1)}.$$

Le costanti A e B saranno date da

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2B - A = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Allora

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = -\tfrac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \tfrac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1}$$
$$= -\tfrac{1}{3}\log|x+2| + \tfrac{1}{3}\log|x-1| + c.$$

• $\Delta = 0$. In questo caso, detta x_0 l'unica radice reale del polinomio x^2+bx+c, potremo scrivere $x^2+bx+c = (x-x_0)^2$. Si procede quindi nel seguente modo. Se $\alpha = 0$ otteniamo immediatamente

$$\int \frac{\beta}{x^2+bx+c}dx = \int \frac{\beta}{(x-x_0)^2}dx = -\frac{\beta}{x-x_0} + c.$$

Mentre se $\alpha \neq 0$ si procede come segue

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}dx = \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+\frac{2\beta}{\alpha}}{x^2+bx+c}dx$$
$$= \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx + \frac{\alpha}{2}\int \frac{\frac{2\beta}{\alpha}-b}{(x-x_0)^2}dx$$
$$= \frac{\alpha}{2}\log(x^2+bx+c) - \frac{\beta-\frac{\alpha b}{2}}{x-x_0} + c.$$

In alternativa, si determinano due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$$

ottenendo

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}dx = \int \frac{A}{x-x_0}dx + \int \frac{B}{(x-x_0)^2}dx$$
$$= A\log|x-x_0| - \frac{B}{x-x_0} + c.$$

Un esempio è il seguente

$\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-4x+4}dx$. Abbiamo $\Delta = 0$ e $x^2-4x+4 = (x-2)^2$. Avremo allora

$$\int \frac{x+2}{x^2-4x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2-4x+4}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+4}dx + \frac{1}{2}\int \frac{8}{(x-2)^2}dx$$
$$= \frac{1}{2}\log(x^2-4x+4) - \frac{4}{x-2} + c.$$

In alternativa, si determinano $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x+2}{x^2-4x+4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{Ax+B-2A}{(x-2)^2}.$$

Le costanti A e B saranno date da

$$\begin{cases} A = 1 \\ B-2A = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 4 \end{cases}$$

Allora
$$\int \frac{x+2}{x^2-4x+4}dx = \int \frac{dx}{x-2} + 4\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \log|x-2| - \frac{4}{x-2} + c.$$

• $\Delta < 0$. In questo caso il polinomio x^2+bx+c risulta iirriducibile (in $\mathbb{R}$) e procediamo nel seguente modo. Se $\alpha = 0$ otteniamo
$$\begin{aligned}\int \frac{\beta}{x^2+bx+c}dx &= \beta \int \frac{1}{(x^2+bx+\frac{b^2}{4})+(c-\frac{b^2}{4})}dx \\ &= \beta \int \frac{1}{(x+\frac{b}{2})^2+(c-\frac{b^2}{4})}dx \\ &= \frac{2\beta}{\sqrt{4c-b^2}} \int \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \frac{1}{(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}})^2+1}dx \\ &= \frac{2\beta}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}) + c.\end{aligned}$$
Mentre se $\alpha \neq 0$ si procede come segue
$$\begin{aligned}&\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}dx = \tfrac{\alpha}{2} \int \frac{2x+\frac{2\beta}{\alpha}}{x^2+bx+c}dx \\ &= \tfrac{\alpha}{2} \int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx + \tfrac{\alpha}{2} \int \tfrac{\frac{2\beta}{\alpha}-b}{x^2+bx+c}dx \\ &= \tfrac{\alpha}{2}\log(x^2+bx+c) + (\beta - \tfrac{\alpha b}{2}) \int \frac{1}{(x^2+bx+\frac{b^2}{4})+(c-\frac{b^2}{4})}dx \\ &= \tfrac{\alpha}{2}\log(x^2+bx+c) + (\beta - \tfrac{\alpha b}{2})\tfrac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \int \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \frac{1}{(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}})^2+1}dx \\ &= \tfrac{\alpha}{2}\log(x^2+bx+c) + \tfrac{2\beta-\alpha b}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}) + c\end{aligned}$$

Vediamo un esempio.

$\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-2x+2}dx$. Abbiamo $\Delta = -4 < 0$ e quindi
$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2-2x+2}dx &= \tfrac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2-2x+2}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx + 3\int \tfrac{1}{x^2-2x+2}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\log(x^2-2x+2) + 3\int \frac{1}{(x^2-2x+1)+1}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\log(x^2-2x+2) + 3\int \frac{1}{(x-1)^2+1}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\log(x^2-2x+2) + 3\arctan(x-1) + c.\end{aligned}$$

Nel caso di funzioni razionali del tipo $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x)$ polinomio di grado 3, si procederà come nei seguenti esempi che illustrano le diverse situazioni (a seconda del numero di zeri del polinomio a denominatore $Q(x)$) che si possono incontrare in questo caso.

- $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$. Determiniamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che
$$\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$
Si ottiene $A = \frac{1}{2}$, $B = -2$, $C = \frac{3}{2}$ e quindi
$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx &= \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - 2\int \tfrac{1}{x-2}dx + \tfrac{3}{2}\frac{1}{x-3}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\log|x-1| - 2\log|x-2| + \tfrac{3}{2}\log|x-3| + c\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x(x-1)^2}dx$. Determiniamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che
$$\frac{x^2-x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$
Si ottiene $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$ e quindi
$$\int \frac{x^2-x+1}{x(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \log|x| - \frac{1}{x-1} + c$$

- $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{(x+1)^3}dx$. Determiniamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che
$$\frac{x^2+2x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}.$$
Si ottiene $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$ e quindi
$$\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^3}dx = \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^3}dx = \log|x+1| + \tfrac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + c$$

- $\displaystyle\int \frac{x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)}$. Osservato che il polinomio x^2-2x+2 non ammette radici reali, determiniamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che
$$\frac{x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}.$$
Si ottiene $A = -1$, $B = 1$, $C = 0$ e quindi, procedendo come nei precedenti esempi,
$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)}dx &= -\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{x}{x^2-2x+2}dx \\ &= -\log|x-1| + \tfrac{1}{2}\log(x^2-2x+2) + \arctan(x-1) + c\end{aligned}$$

Nel caso di funzioni razionali del tipo $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x)$ polinomio di grado maggiore di 3, le situazioni che si potranno incontrare saranno chiaramente più numerose. Tali casi si tratteranno essenzialmente come negli esempi precedenti, ad eccezione dei casi in cui la fattorizzazione del polinomio $Q(x)$ contiene un termine della forma $(x^2+1)^n$, con $n \geq 2$, o riconducibili a tale forma. In tali situazioni si utilizzerà la formula ricorsiva
$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}, \quad \forall n \geq 2 \tag{13}$$

osservato che
$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x + c.$$
Abbiamo difatti in generale che se il polinomio $Q(x)$ si decompone nel prodotto
$$Q(x) = (x-x_1)^{\lambda_1}...(x-x_k)^{\lambda_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{\mu_1}...(x^2+\alpha_h x+\beta_h)^{\mu_h}$$
essendo i polinomi $x^2+\alpha_i x+\beta_i$ irriducibili in $\mathbb{R}$ per ogni $i=1,...,h$, allora la funzione razionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dove $P(x)$ ha grado inferiore al grado di $Q(x)$ potrà decomporsi nella somma dei seguenti fratti semplici
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{\lambda_j}\frac{A_j}{(x-x_j)^i} + \sum_{j=1}^{h}\sum_{i=1}^{\mu_j}\frac{B_j x + C_j}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^i}$$
essendo $A_j, B_j, C_j \in \mathbb{R}$ costanti da determinare.
Ad esempio, per calcolare $\int \frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)x}dx$, determiniamo le costanti $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che
$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x}.$$
Si ottiene $A=-\frac{5}{3}$, $B=\frac{3}{2}$, $C=-\frac{1}{2}$ e $D=2$ da cui segue
$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)x}dx &= -\tfrac{5}{3}\int\frac{1}{x-1}dx + \tfrac{3}{2}\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+ \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx + 2\int\frac{1}{x}dx \\ &= -\tfrac{5}{3}\log|x-1| - \tfrac{3}{2}\frac{1}{x-1}+ \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\log|x+1| + 2\log|x| + c\end{aligned}$$
Calcoliamo ora $\int \frac{x^2+x}{(x^2-2x+2)^2}dx$. Osservato che x^2-2x+2 è irriducibile in $\mathbb{R}$, determiniamo innanzitutto $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che
$$\frac{x^2+x}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2-2x+2)^2}$$
Si ottiene $A=0$, $B=1$, $C=3$, $D=-2$. Inoltre, osservato che $x^2-2x+2 = (x-1)^2+1$, utilizzando la formula (13) con $n=2$ abbiamo
$$\int\frac{1}{(x^2-2x+2)^2}dx = \int\frac{1}{((x-1)^2+1)^2}dx = \tfrac{1}{2}\frac{x-1}{(x-1)^2+1} + \tfrac{1}{2}\arctan(x-1)+c$$
Allora, utilizzando le tecniche già sfruttate nei precedenti esempi concludiamo
$$\begin{aligned}&\int\frac{x^2+x}{(x^2-2x+2)^2}dx = \int\frac{1}{x^2-2x+2}dx + \int\frac{3x-2}{(x^2-2x+2)^2}dx = \\ &= \arctan(x-1) + \tfrac{3}{2}\int\frac{2x-2}{(x^2-2x+2)^2}dx + \int\frac{1}{(x^2-2x+2)^2}\,dx \\ &= \arctan(x-1) - \tfrac{3}{2}\frac{1}{x^2-2x+2} + \tfrac{1}{2}\frac{x-1}{(x-1)^2+1} + \tfrac{1}{2}\arctan(x-1)+c \\ &= \tfrac{3}{2}\arctan(x-1) + \tfrac{1}{2}\frac{x-4}{x^2-2x+2} + c\end{aligned}$$

In alternativa, per calcolare il precedente integrale, si può utilizzare la *Formula di Hermite* secondo la quale per funzioni razionali della forma

$$\frac{P(x)}{(x^2+bx+c)^k}, \quad k \geq 2$$

con $P(x)$ polinomio di grado minore di $2k$ e x^2+bx+c irriducibile in $\mathbb{R}$, esistono delle costanti $A, B \in \mathbb{R}$ ed un polinomio $p(x)$ di grado inferiore a $2k-2$ tali che

$$\frac{P(x)}{(x^2+bx+c)^k} = \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} + \frac{d}{dx}\left(\frac{p(x)}{(x^2+bx+c)^{k-1}}\right)$$ (b)

da cui si ottiene

$$\int \frac{P(x)}{(x^2+bx+c)^k}\,dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx + \frac{p(x)}{(x^2+bx+c)^{k-1}}$$

Quindi ad esempio, per calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{(x^2-2x+2)^2}dx$, determiniamo le costanti A, B, C, D tali che

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x}{(x^2-2x+2)^2} &= \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{Cx+D}{x^2-2x+2}\right)\\ &= \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{C(x^2-2x+2)-(Cx+D)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}\end{aligned}$$

Si ottiene allora che $A=0$, $B=\frac{3}{2}$, $C=\frac{1}{2}$ e $D=-2$, da cui

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^2+x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx = \tfrac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-2x+2}dx + \frac{\frac{1}{2}x-2}{x^2-2x+2}\\ &= \tfrac{3}{2}\arctan(x-1) + \tfrac{1}{2}\frac{x-4}{x^2-2x+2} + c\end{aligned}$$

Indicando ora con R una funzione razionale dell'argomento in parentesi, si possono razionalizzare i seguenti integrali mediante le sostituzioni indicate:

(i) $\displaystyle\int R(x, \sqrt[n]{\tfrac{ax+b}{cx+d}})\,dx$ si pone $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (da cui $x = \frac{dt^n-b}{-ct^n+a}$ e $dx = \frac{ad-bc}{(-ct^n+a)^2}nt^{n-1}\,dt$);

(ii) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, $a>0$, poniamo $\sqrt{a}x+t = \sqrt{ax^2+bx+c}$ e quindi $x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$;

(b) La *formula di Hermite* in generale afferma che se

$$Q(x) = (x-x_1)^{\lambda_1}...(x-x_k)^{\lambda_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{\mu_1}...(x^2+\alpha_h x+\beta_h)^{\mu_h}$$

essendo i polinomi $x^2+\alpha_i x+\beta_i$ irriducibili in $\mathbb{R}$ per ogni $i=1,...,h$, allora per ogni polinomio $P(x)$ di grado inferiore a $Q(x)$ vale

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{k}\frac{A_j x+B_j}{x-x_j} + \sum_{j=1}^{h}\frac{C_j x+D_j}{x^2+\alpha_j x+\beta_j} + \frac{d}{dx}\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)$$

essendo $A_j, B_j, C_j, D_j \in \mathbb{R}$ delle costanti,

$$q(x) = (x-x_1)^{\lambda_1-1}...(x-x_k)^{\lambda_k-1}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{\mu_1-1}...(x^2+\alpha_h x+\beta_h)^{\mu_h-1}$$

e $p(x)$ un polinomio di un grado inferiore al grado di $q(x)$.

(iii) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ con $a<0$, ci si riconduce al caso (i) osservato che $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ e quindi $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}(x-\alpha)\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$;

(iv) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx$ ci si riconduce al caso (ii) ponendo $t=\sqrt{ax+b}$, quindi $x=\frac{t^2-b}{a}$ e $dx = \frac{2}{a}t\ dt$;

(v) $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x, \tan x)\,dx$ ponendo $t=\tan(\frac{x}{2})$ si ottiene $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ e $dx = \frac{2}{t^2+1}\ dt$;

(vi) $\displaystyle\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x)\,dx$, ponendo $t = \tan x$ si ottiene $\cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}$ e $dx = \frac{1}{t^2+1}\ dt$.

Vediamo un esempio di integrale della forma (v). Consideriamo l'integrale

$$\int \frac{\tan x}{\sin x - \cos x} dx.$$

Utilizzando la sostituzione consigliata otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan x}{\sin x - \cos x} dx &= \int \frac{2t}{1-t^2} \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\ dt \\ &= 4\int \frac{t}{(1-t^2)(t^2+2t-1)} dt\end{aligned}$$

e l'ultimo integrale si potrà risolvere determinando $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t}{(1-t^2)(t^2+2t-1)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{t+1-\sqrt{2}} + \frac{D}{t+1+\sqrt{2}}$$

essendo $t^2+2t-1 = (t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2})$.

Vediamo infine alcune tecniche che si possono usare per integrare funzioni contenenti termini della forma $\sqrt{ax^2+bx+c}$ con $a \neq 0$. Come casi notevoli consideriamo gli integrali

(A) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$;

(B) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx$;

(C) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx$.

Il primo integrale $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, già calcolato mediante integrazione per parti, si può calcolare operando una sostituzione, ricordando che $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Infatti, ponendo $x = \sin t$ e dunque $dx = \cos t\,dt$, osservato che essendo $t = \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ risulta $\sqrt{1-x^2} = \cos t \geq 0$, si ottiene

$$\mathcal{I} = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 t\,dt.$$

Integrando per parti ne segue che

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int \cos^2 t\,dt = \sin t\cos t + \int \sin^2 t\,dt\\ &= \sin t\cos t + \int (1-\cos^2 t)dt = \sin t\cos t + t - \mathcal{I}\end{aligned}$$

da cui

$$\mathcal{I} = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}(\sin t\cos t + t) + c = \tfrac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c$$

In modo analogo procediamo per calcolare il secondo integrale $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$. Ricordando che $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, ponendo $x = \cosh t$ e dunque $dx = \sinh t\,dt$, osservato che $t = \operatorname{settcosh} x \geq 0$ da cui $\sqrt{x^2-1} = \sinh t \geq 0$, otteniamo

$$\mathcal{I} = \int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh^2 t\,dt$$

ed integrando per parti ne segue che

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int \sinh^2 t\,dt = \sinh t\cosh t - \int \cosh^2 t\,dt\\ &= \sinh t\cosh t - \int (\sinh^2 t + 1)dt = \sinh t\cosh t - t - \mathcal{I}\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\mathcal{I} = \int \sqrt{x^2-1}\,dx &= \frac{1}{2}(\sinh t\cosh t - t) + c\\ &= \tfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{settcosh} x) + c\\ &= \tfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \log(x + \sqrt{x^2-1})) + c\end{aligned}$$

Con analoghe considerazioni calcoliamo $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$. Ponendo $x = \sinh t$ e dunque $dx = \cosh t\,dt$, osservato che $\sqrt{x^2+1} = \cosh t$ essendo $\cosh t \geq 0$, otteniamo

$$\mathcal{I} = \int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \cosh^2 t\,dt$$

ed integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int \cosh^2 t\,dt = \sinh t\cosh t - \int \sinh^2 t\,dt\\ &= \sinh t\cosh t - \int (\cosh^2 t - 1)dt = \sinh t\cosh t + t - \mathcal{I}\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\mathcal{I} = \int \sqrt{x^2+1}\,dx &= \tfrac{1}{2}(\sinh t\cosh t + t) + c\\ &= \tfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{settsinh} x) + c\\ &= \tfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} + \log(x + \sqrt{x^2+1})) + c\end{aligned}$$

Con le medesime sostituzioni potremo calcolare integrali di espressioni razionali contenenti radicali delle precedenti forme. Ad esempio per calcolare

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

poniamo $x = \cosh t$, ottenendo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \int \frac{1}{\cosh t + 1}\,dt\\ &= 2\int \frac{e^t}{(e^t-1)^2} = -\frac{2}{e^t-1} + c = -\frac{2}{x+\sqrt{x^2-1}-1} + c\end{aligned}$$

essendo $e^t = e^{\operatorname{settcosh} x} = x + \sqrt{x^2-1}$.

Riconducendosi agli integrali sopra considerati potremo calcolare integrali di espressioni razionali contenenti $\sqrt{ax^2+bx+c}$ con $a \neq 0$, senza ricorrere alle sostituzioni razionalizzanti fornite a pagina 172. Vediamo qualche esempio.

- $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+3x-2}\,dx$. Osserviamo che $-x^2+3x-2 = \frac{1}{4}(1-(2x-3)^2)$ potremo ricondurci all'integrale (A) ponendo $s = 2x-3$ e dunque $dx = \frac{1}{2}ds$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{-x^2+3x-2}\,dx &= \tfrac{1}{2}\int \sqrt{1-(2x-3)^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\int \sqrt{1-s^2}\,ds\\ &= \tfrac{1}{8}(\arcsin s + s\sqrt{1-s^2}) + c\\ &= \tfrac{1}{8}(\arcsin(2x-3) + (2x-3)\sqrt{1-(2x-3)^2}) + c\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx$. Risulta $-x^2+2x+3 = 4\left(1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right)$ e dunque posto $s = \frac{x-1}{2}$ si ottiene

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx = 2\int \frac{s+1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds.$$

Per calcolare l'ultimo integrale potremo procedere con tecniche elementari oppure eseguire una seconda sostituzione ponendo $s = \sin t$ (come nel caso (A)), ottenendo

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx &= 2\int \frac{s+1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = 2\int \sin t + 1\,dt\\ &= 2\,(t-\cos t) + c = 2\left(\arcsin s - \sqrt{1-s^2}\right) + c\\ &= 2\arcsin\frac{x-1}{2} - 2\sqrt{1-\frac{x-1}{2}} + c\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$. Risulta $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ e posto $s = x+1$ otteniamo

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \int \frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}\,ds$$

Per calcolare l'ultimo integrale come nel caso precedente potremo procedere con tecniche elementari oppure eseguire la sostituzione $s = \sinh t$ (come nel caso (C)), ottenendo

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx &= \int \frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}\,ds = \int \sinh t - 1\,dt\\ &= \cosh t - t + c = \sqrt{1+s^2} - \operatorname{settsinh} s + c\\ &= \sqrt{(x+1)^2+1} - \operatorname{settsinh}(x+1) + c\\ &= \sqrt{x^2+2x+2} - \log(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + c\end{aligned}$$

- $\int (x+2)^2\sqrt{x^2+4x+3}\,dx$. Si ha $x^2+4x+3=(x+2)^2-1$ e ponendo $s=x+2$ si ottiene

$$\int (x+2)^2\sqrt{x^2+4x+3}\,dx = \int s^2\sqrt{s^2-1}\,ds$$

Per calcolare tale integrale, come nel caso (B), poniamo $s=\cosh t$, ottenendo

$$\begin{aligned}\int s^2\sqrt{s^2-1}\,ds &= \int \cosh^2 t\sinh^2 t\,dt = \tfrac{1}{16}\int (e^t+e^{-t})^2(e^t-e^{-t})^2\,dt\\ &= \tfrac{1}{16}\int e^{4t}+e^{-4t}-2\,dt = \tfrac{1}{64}(e^{4t}-e^{-4t}-8t)+c\\ &= \tfrac{1}{64}((x+2+\sqrt{x^2+4x+3})^4-(x+2+\sqrt{x^2+4x+3})^{-4}+\\ &\quad -8\log(x+2+\sqrt{x^2+4x+3}))+c\end{aligned}$$

4. Calcolo di integrali definiti: aree e lunghezze

Torniamo a considerare integrali definiti di funzioni continue, $\int_a^b f(x)\,dx$. Dalla formula fondamentale del calcolo integrale abbiamo visto che se $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$ in $[a,b]$ allora $\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a) = [G(x)]_a^b$. Ne segue allora che una volta determinato, utilizzando le tecniche sviluppate nel precedente paragrafo, l'integrale $\int f(x)\,dx = G(x)+c$, potremo applicare la formula fondamentale per il calcolo dell'integrale definito. Ad esempio, per calcolare $\int_1^2 \log x dx$, ricordando che $\int \log x\,dx = x\log x - x + c$, otteniamo

$$\int_1^2 \log x dx = [x\log x - x]_1^2 = 2\log 2 - 2 + 1 = 2\log 2 - 1$$

In alternativa, potremo calcolare direttamente l'integrale definito note le primitive delle funzioni elementari e utilizzando le corrispondenti *regola di integrazione per parti*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

e *regola di integrazione per sostituzione*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$