funzione incognita p(t) e la sua derivata prima. Sottolineamo che l'incognita di una equazione differenziale è una funzione (o più funzioni), e non è un numero reale (o più numeri reali), come accade ad esempio per le equazioni algebriche.

Non avendo ancora descritto alcun metodo risolutivo per le equazioni differenziali, ci limitiamo a verificare che la funzione $p(t) = e^{at}$ è una soluzione dell'equazione (124.2). Infatti in tal caso risulta $p'(t) = ae^{at}$, e quindi l'equazione (124.2) è soddisfatta per ogni t. Più generalmente, per ogni valore della costante c, la funzione $p(t) = ce^{at}$ è soluzione; infatti:

$$\frac{d}{dt}\, p(t) = \frac{d}{dt}\, c\, e^{at} = ca\, e^{at} = ap(t)\,. \tag{124.3}$$

Perciò il peso della cellula cresce secondo la legge $p(t) = ce^{at}$. La costante c può essere determinata conoscendo il peso p_0 all'istante iniziale. Se indichiamo con p_0 il peso (noto) della cellula all'istante t = 0, abbiamo la *condizione iniziale:*

$$p(0) = c\, e^0 = c = p_0\,. \tag{124.4}$$

In definitiva la soluzione è $p(t) = p_0 e^{at}$.

Le considerazioni proposte per descrivere l'aumento del peso di una cellula si applicano anche al modello di *crescita di una popolazione*, introdotto nel paragrafo 48. Infatti la legge (124.1) è simile alla legge (48.7) (nel paragrafo 48 la costante a era stata assunta uguale ad 1). Possiamo quindi interpretare la formula (124.1) come un modello per la funzione popolazione p(t); essa soddisfa l'equazione differenziale (124.2). Se la condizione iniziale è $p(0) = p_0$, troviamo di nuovo la soluzione (detta, brevemente, *crescita esponenziale*):

$$p(t) = p_0\, e^{at}\,. \tag{124.5}$$

Quindi la popolazione è completamente determinata, nota la costante a, e nota la popolazione p_0 (> 0) all'istante t = 0. Se a > 0 la popolazione cresce rispetto al tempo; se a = 0 la popolazione rimane costante: $p(t) = p_0$; se a < 0 la popolazione decresce e tende a zero per $t \to +\infty$.

Nei paragrafi seguenti prenderemo in considerazione, oltre all'equazione differenziale (124.2), alcune generalizzazioni, utili nelle applicazioni.

In questo capitolo studieremo le equazioni del *primo ordine*, cioè equazioni differenziali che esprimono un legame tra una funzione incognita e la sua derivata prima; considereremo le equazioni lineari, le equazioni di Bernoulli, le equazioni a variabili separabili. Nel capitolo seguente studieremo alcune equazioni del *secondo ordine*, cioè equazioni differenziali che esprimono un legame tra una funzione incognita e le sue derivate prime e

seconde; considereremo in particolare le equazioni lineari e coefficienti costanti. Prenderemo anche in considerazione alcuni *sistemi differenziali* del primo ordine in due equazioni e due incognite.

125. Equazioni lineari

Un'*equazione differenziale lineare del primo ordine* è del tipo:

$$y' = a(x)\, y + b(x), \tag{125.1}$$

dove a(x), b(x) sono funzioni continue in un intervallo fissato. La funzione y = y(x) è l'incognita dell'equazione differenziale (125.1). Una funzione y(x) si chiama *soluzione* dell'equazione data se è derivabile e se y(x), y′ (x) soddisfano l'equazione (125.1) per ogni x dell'intervallo fissato.

Se la funzione b(x) è identicamente nulla, l'equazione si dice *omogenea*, altrimenti si dice *non omogenea*.

Se a, b sono costanti, con b = 0, si ritrova l'equazione omogenea (124.2) considerata nel paragrafo precedente, che ha come soluzioni le funzioni in (124.5). È perciò naturale aspettarsi che, anche in generale, l'equazione (125.1) abbia un insieme di soluzioni dipendenti da una costante scelta arbitrariamente.

TEOREMA. — *Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale* (125.1) *sono espresse da*

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)}\, b(x)\, dx, \tag{125.2}$$

dove A(x) *è una primitiva della funzione* a(x).

Dimostrazione: sia A(x) una primitiva della funzione a(x), cioè A′ (x) = a(x) per ogni x dell'intervallo considerato. La funzione $e^{-A(x)}$ è positiva per ogni x; moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione differenziale (125.1) per tale funzione:

$$e^{-A(x)}\, y'(x) = e^{-A(x)}\, a(x)\, y(x) + e^{-A(x)}\, b(x). \tag{125.3}$$

Si riconosce che l'equazione precedente contiene gli addendi della seguente derivata:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-A(x)}\, y(x)\right] = e^{-A(x)}\,(-A'(x))\, y(x) + \tag{125.4}$$
$$+\, e^{-A(x)}\, y'(x) = e^{-A(x)}\, y'(x) - e^{-A(x)}\, a(x)\, y(x);$$

da tale osservazione si deduce che l'equazione (125.3) è equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-A(x)}\, y(x)\right] = e^{-A(x)}\, b(x). \tag{125.5}$$

Integrando entrambi i membri otteniamo

$$e^{-A(x)}\, y(x) = \int e^{-A(x)}\, b(x)\, dx \tag{125.6}$$

e, moltiplicando ambo i membri per $e^{A(x)}$, otteniamo la (125.2). Infine notiamo che tutti i passaggi fatti sono invertibili; quindi con i passaggi indicati si verifica che le funzioni $y(x)$ in (125.2) sono effettivamente soluzioni dell'equazione differenziale (125.1). Ciò completa la prova.

Per le equazioni differenziali lineari del primo ordine omogenee, cioè con $b(x) = 0$, le soluzioni (125.2) divengono più semplicemente

$$y(x) = c\, e^{A(x)}\,, \tag{125.7}$$

dove $A(x)$ è una primitiva della funzione $a(x)$, e dove c è una costante arbitraria.

Come primo esempio, applichiamo il teorema all'equazione (124.2) che, con i simboli di questo paragrafo, si scrive equivalentemente $y' = ay$. Essendo a costante, poniamo $A(x) = ax$. In accordo con quanto detto nel paragrafo precedente, dalla (125.7) otteniamo che le soluzioni dell'equazione (124.2) sono date, per ogni scelta della costante c, da:

$$y(x) = c\, e^{ax}\,. \tag{125.8}$$

Come ulteriore esempio, determiniamo per $x > 0$ tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{xy + 1}{x^2}\,. \tag{125.9}$$

Scomponendo l'espressione a secondo membro, si riconosce che si tratta di una equazione differenziale lineare con coefficienti $a(x) = 1/x$, $b(x) = 1/x^2$. Essendo interessati al caso

$x > 0$, poniamo $A(x) = \log x$; quindi $e^{-A(x)} = 1/x$. Dalla formula risolutiva (125.2) si ottiene

$$y(x) = x \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\, dx = x\left(-\frac{1}{2\,x^2} + c\right) = -\frac{1}{2x} + cx. \tag{125.10}$$

126. Teorema di Cauchy per le equazioni lineari del primo ordine

In questo paragrafo mettiamo in luce la dipendenza delle soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale lineare del primo ordine (125.1) dal *dato iniziale*. Precisamente, mostriamo che, per ogni *dato iniziale* y_0 e per ogni punto x_0, è possibile scegliere la costante che deriva dall'integrazione indefinita in (125.2), in modo da soddisfare la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$.

Risolviamo il seguente problema differenziale, che viene chiamato *problema di Cauchy*:

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}. \tag{126.1}$$

TEOREMA DI CAUCHY (PER LE EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE). — *Sia* x_0 *un punto di un intervallo dove* $a(x)$, $b(x)$ *sono continue. Per ogni numero reale* y_0 *esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy* (126.1).

Dimostrazione: sappiamo già che l'equazione differenziale ha infinite soluzioni. Occorre provare che tra queste ne esiste una, ed una sola, con la proprietà che $y(x_0) = y_0$. A tale scopo scegliamo $A(x)$, primitiva di $a(x)$, in modo che $A(x_0) = 0$, cioè:

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt. \tag{126.2}$$

Inoltre scriviamo la formula (125.2), di rappresentazione delle soluzioni, in modo da mettere in luce la costante additiva che proviene dall'integrazione indefinita:

$$y(x) = e^{A(x)}\left(c + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}\, b(t)\, dt\right). \tag{126.3}$$

Dato che $A(x_0) = 0$, risulta $y(x_0) = e^0(c + 0) = c$; quindi esiste una ed una sola costante c per cui

$$c = y_0 = y(x_0). \tag{126.4}$$

Diamo un'interpretazione geometrica del teorema di Cauchy. Supponiamo per semplicità che a(x), b(x) siano continue su tutto l'asse reale. Fissiamo un sistema di assi cartesiani x, y. Il teorema di Cauchy per le equazioni differenziali lineari del primo ordine afferma che, per ogni punto di coordinate (x_0, y_0), passa una ed una sola soluzione, o *curva integrale*, dell'equazione differenziale in (126.1).

È possibile disegnare tali curve integrali tenendo conto che, per ogni punto (x_0, y_0), il coefficiente angolare $y'(x_0)$ della retta tangente a tali curve è determinato dall'equazione differenziale stessa; infatti si ha

$$y'(x_0) = a(x_0)\, y(x_0) + b(x_0) = a(x_0)\, y_0 + b(x_0). \tag{126.5}$$

In figura 15.1 riportiamo il grafico delle curve integrali corrispondenti al caso $a \equiv 1$, $b \equiv 0$; cioè corrispondenti all'equazione $y' = y$. In tal caso il coefficiente angolare è uguale all'ordinata di ogni punto. Il disegno mostra chiaramente che l'equazione data ha come soluzioni le curve esponenziali $y(x) = ce^x$, con c costante.

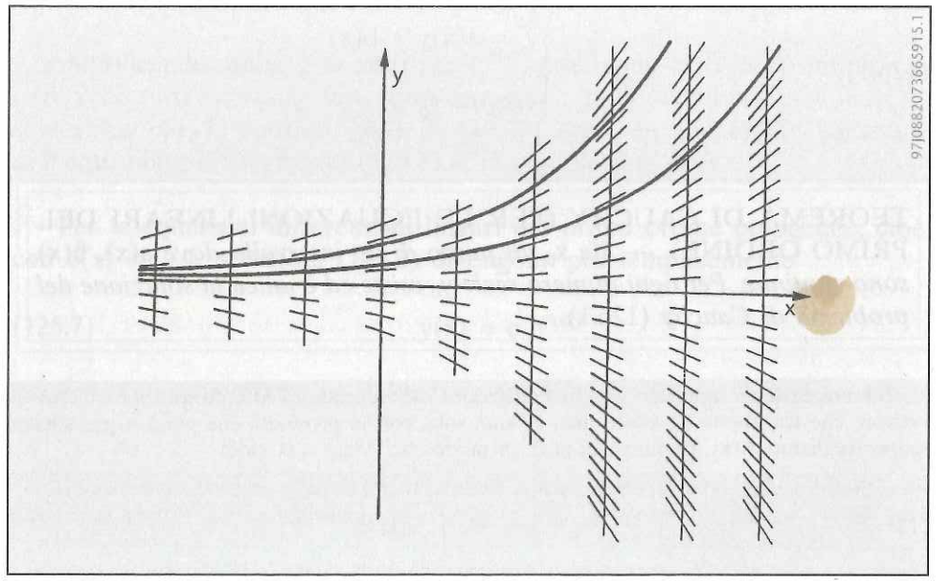


Figura 15.1

127. Equazioni di Bernoulli

Si dicono *di Bernoulli* le equazioni differenziali del primo ordine del tipo

$$y' = a(x)y + b(x)\, y^{\alpha}, \tag{127.1}$$

con a(x), b(x) funzioni continue in uno stesso intervallo. L'esponente α è un numero reale che supporremo diverso da 0 e da 1, per non ricadere nel caso delle equazioni lineari, considerato nel paragrafo precedente.

Notiamo che, se $\alpha > 0$, la funzione y(x) identicamente nulla è soluzione dell'equazione data. Se $\alpha > 0$ e y(x) non si annulla per alcun valore di x, oppure se $\alpha < 0$, è opportuno dividere entrambi i membri dell'equazione per y^{α}:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = a(x)\, y^{1-\alpha} + b(x). \tag{127.2}$$

È ora naturale effettuare la sostituzione $z(x) = [y(x)]^{1-\alpha}$; per la regola di derivazione delle funzioni composte risulta

$$z' = (1 - \alpha)\, y^{-\alpha}\, y' \;; \tag{127.3}$$

sostituiamo il valore trovato nell'equazione (127.2):

$$z' = (1 - \alpha)\, a(x)z + (1 - \alpha)\, b(x). \tag{127.4}$$

Questa è un'equazione lineare del primo ordine che si risolve con il metodo indicato nel paragrafo 125. Ad ogni soluzione z(x) di (127.4) corrisponde una soluzione y(x), dell'equazione iniziale (127.1), data da

$$y(x) = [z(x)]^{1/(1-\alpha)}, \tag{127.5}$$

purché sia definito il secondo membro.

Risolviamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2y \operatorname{tg} x + \sqrt{y} & (-\pi/2 < x < \pi/2) \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{127.6}$$

L'equazione differenziale è di Bernoulli, con esponente $\alpha = 1/2$. La funzione $y \equiv 0$ non è soluzione (infatti non verifica la condizione iniziale). Dividiamo l'equazione per $\sqrt{y}$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y}\, \operatorname{tg}x + 1 \;; \tag{127.7}$$

effettuiamo la sostituzione $z(x) = \sqrt{y(x)}$; per la condizione iniziale $y(0) = 1$, deve anche risultare $z(0) = 1$. Inoltre, essendo $z' = y'/(2\sqrt{y})$, otteniamo il problema di Cauchy nella funzione incognita z:

$$(127.8)\qquad \begin{cases} z' = z \operatorname{tg} x + (1/2) \\ z(0) = 1 \end{cases}.$$

L'equazione differenziale è lineare; una primitiva della funzione $a(x) = \operatorname{tg} x$ è $A(x) = -\log|\cos x|$; però, dato che nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ la funzione $\cos x$ è positiva, in tale intervallo $A(x) = -\log \cos x$ è una primitiva della funzione $\operatorname{tg} x$. Risulta

$$(127.9)\qquad e^{-A(x)} = e^{\log \cos x} = \cos x; \qquad e^{A(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Dalla formula risolutiva (125.2) per le equazioni lineari, otteniamo

$$(127.10)\qquad \begin{aligned} z(x) &= \frac{1}{\cos x}\int \frac{1}{2}\cos x\, dx = \\ &= \frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + c\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{c}{\cos x}. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale $z(0) = 1$ si determina la costante c, che risulta uguale ad 1. Perciò la soluzione del problema di Cauchy (127.6) è la funzione definita nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ da

$$(127.11)\qquad y(x) = (z(x))^2 = \left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right)^2.$$

Come secondo esempio, determiniamo tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$(127.12)\qquad y' = x(y - y^3).$$

È un'equazione di Bernoulli con esponente $\alpha = 3$. Si noti che la funzione $y = 0$ è una soluzione. Se $y \neq 0$, dividendo per y^3 otteniamo

$$(127.13)\qquad \frac{y'}{y^3} = x\, y^{-2} - x.$$

Ponendo $z = y^{-2}$, da cui $z' = -2y^{-3}y'$, otteniamo l'equazione lineare nell'incognita z:

$$(127.14)\qquad z' = -2xz + 2x.$$

Una primitiva della funzione $-2x$ è $A(x) = -x^2$; quindi le soluzioni della (127.14) sono date da

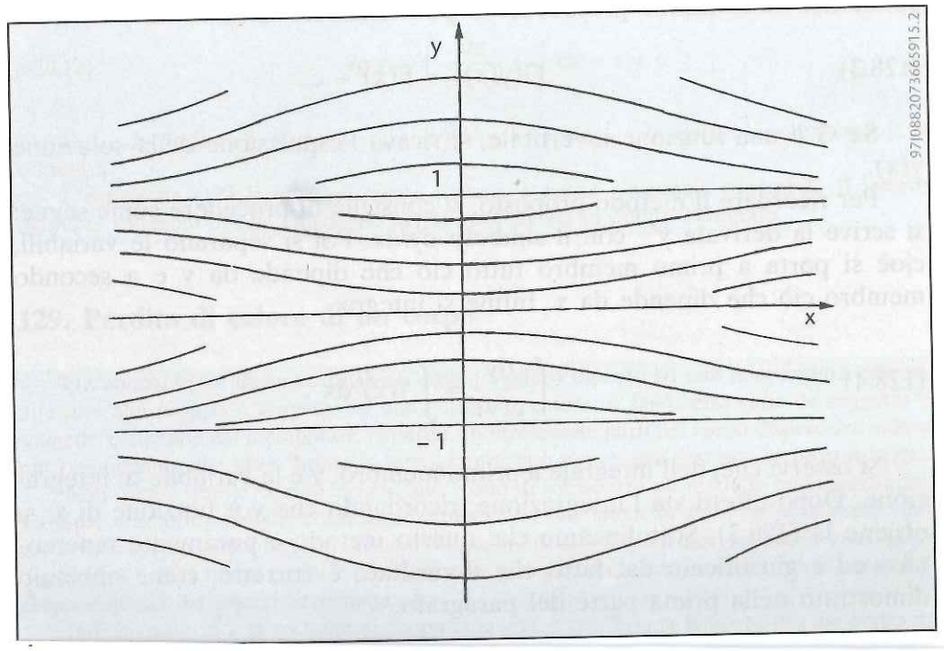
$$(127.15)\qquad z(x) = e^{-x^2}\int 2x\, e^{x^2}\, dx = e^{-x^2}(e^{x^2} + c) = 1 + c\, e^{-x^2}.$$

Infine troviamo le soluzioni dell'equazione iniziale (127.12):

$$(127.16)\qquad y(x) = \pm(1 + c\, e^{-x^2})^{-1/2}.$$

Tutte le soluzioni espresse dalla (127.16) sono di segno costante, cioè positive oppure negative per ogni x. La soluzione $y = 0$, trovata all'inizio, non si ottiene dalla (127.16) per alcun valore della costante c. Si osservi che, per $c = 0$, si ottengono le soluzioni $y = \pm 1$.

Valutiamo il segno della derivata $y'(x)$; a tale scopo si può calcolare esplicitamente la derivata di $y(x)$, oppure, più semplicemente, si può stabilire il segno della y' dall'equazione (127.12). Risulta $y' = xy(1 - y^2)$; si stabilisce quando $y' > 0$ in base al segno dei tre fattori x, y, $1 - y^2$. Limitiamoci alle soluzioni $y(x)$ positive. Se $0 < y << 1$, allora $y' > 0$ per $x > 0$, mentre $y' < 0$ se $x < 0$. In tal caso il punto $x = 0$ è di minimo per ogni soluzione. Invece, se $y > 1$ (che corrisponde analiticamente a $c < 0$), il punto $x = 0$ è di massimo per ogni soluzione. Riportiamo in figura 15.2 i grafici delle soluzioni trovate.



CAPITOLO 16

MODELLI MATEMATICI IN DINAMICA DI POPOLAZIONI

Abbiamo già incontrato nei paragrafi 15, 48, 75, 124 semplici modelli di crescita di una popolazione di individui, o di batteri, oppure di crescita di un corpo o di un insieme di cellule. In questo capitolo riprendiamo l'argomento per studiare alcune leggi significative di crescita.

132. Crescita di una popolazione isolata

Indichiamo con $p(t)$ (≥ 0) il numero degli individui di una popolazione in funzione del tempo. Supponiamo che la popolazione sia *isolata*, cioè che la crescita non sia influenzata da fattori esterni.

Indichiamo con t, $t + h$ ($h \neq 0$) due istanti di tempo. Come nel paragrafo 124 supporremo che la crescita della popolazione, nell'intervallo di tempo h, sia proporzionale alla popolazione stessa e all'intervallo di tempo:

$$p(t + h) - p(t) = ahp(t). \tag{132.1}$$

Il fattore di proporzionalità a può essere considerato costante in un piccolo intervallo di tempo. Però ciò non è realistico in un lungo intervallo di tempo; infatti è ragionevole pensare che maggiore è il numero degli individui, peggiori divengano le condizioni ambientali e di conseguenza minore divenga la capacità di riproduzione. Perciò si ottiene un modello più realistico supponendo che a sia una funzione decrescente di p.

Il belga Verhulst ha proposto un modello basato su una funzione $a(p)$ lineare:

$$a(p) = -mp + q, \tag{132.2}$$

con m,q costanti positive. A causa del segno meno, la funzione $a(p)$ è decrescente. Il grafico di $a(p)$ è riportato in figura 16.1.

Essendo interessati al caso $a(p) > 0$, supporremo che

$$0 < p < q/m. \tag{132.3}$$

Prima di procedere oltre è opportuno osservare che, per ogni t, $p(t)$ è un numero intero; quindi la funzione $p(t)$, se non è costante, è discontinua. Nelle applicazioni è interessante considerare popolazioni con un grande numero di individui; in tal caso, non si modifica la sostanza del modello supponendo che $p(t)$ vari con continuità rispetto al tempo. Anzi, più precisamente, supporremo che $p(t)$ sia derivabile rispetto al tempo.

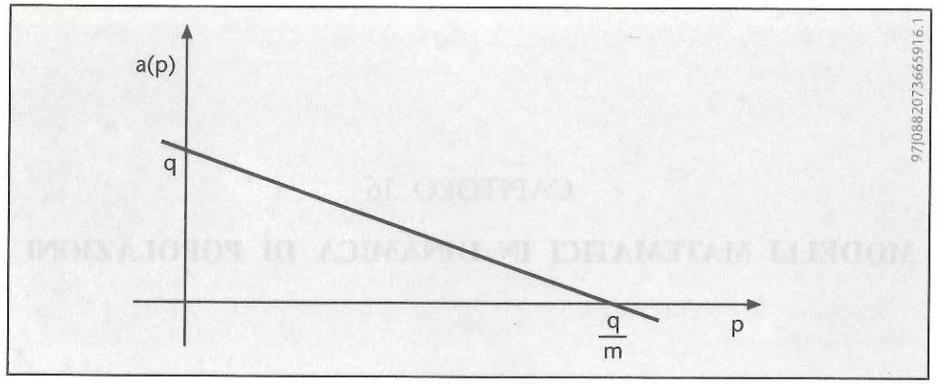


Figura 16.1

Come nel paragrafo 124, dividiamo entrambi i membri dell'equazione (132.1) per h, e calcoliamo il limite per $h \to 0$; abbiamo

(132.4) $$p' = ap.$$

Tenendo presente l'espressione (132.2) di $a = a(p)$, otteniamo l'equazione differenziale

(132.5) $$p' = qp - m\,p^2 .$$

Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine di Bernoulli, che possiamo risolvere con il metodo del paragrafo 127. Cominciamo con l'osservare che la soluzione identicamente nulla non è di interesse nel nostro caso concreto. Dividiamo entrambi i membri per p^2:

(132.6) $$\frac{p'}{p^2} = q\,\frac{1}{p} - m.$$

Poniamo $z(t) = 1/p(t)$. Risulta $z' = -\,p'/p^2$; quindi

(132.7) $$z' = -\,qz + m.$$

Abbiamo ottenuto una equazione lineare nell'incognita $z(t)$, che si risolve con la formula (125.2). Una primitiva della funzione costante $-\,q$ è $A(t) = -\,qt$; quindi

(132.8) $$z(t) = e^{-qt}\int e^{qt}\,m\,dt = \frac{1}{q}\,e^{-qt}\int q\,e^{qt}\,m\,dt = \\ = \frac{1}{q}\,e^{-qt}\,(m\,e^{qt} + c) = \frac{m}{q} + c\,e^{-qt} .$$

Ricordando che $p = 1/z$, si ottiene

(132.9) $$p(t) = \frac{q}{m + cq\,e^{-qt}} .$$

La soluzione $p(t)$ trovata è definita per ogni t se la costante c è positiva; inoltre, in tal caso

(132.10) $$0 < p(t) = \frac{q}{m + cq\,e^{-qt}} < \frac{q}{m} ;$$

quindi, se $c > 0$, le condizioni (132.3) sono verificate.

La funzione $p(t)$ in (132.9), detta *funzione logistica*, è crescente; dato che il coefficiente ad esponente della funzione esponenziale è negativo, per $t \to +\infty$, $p(t)$ tende al valore

(132.11) $$\lim_{t\to+\infty} p(t) = \frac{q}{m} .$$

Il lettore è invitato a verificare, calcolando le derivate prime e seconde, che, se c, m, q sono positivi, la funzione $p(t)$ è strettamente crescente per ogni t, è convessa per $t < (1/q)\log(cq/m)$ ed è concava altrimenti. In figura 16.2 è disegnato il grafico di $p(t)$.

Si noti che inizialmente $p(t)$ cresce lentamente; poi la crescita diventa più rapida, in prossimità del punto di flesso; infine, per $t \to +\infty$, $p(t)$ cresce più lentamente ed il tasso di accrescimento $p'(t)$ tende a zero. Si noti anche che, per valori di $p(t)$ vicini a zero, la funzione $p(t)$ è convessa ed ha un grafico simile alla funzione esponenziale. Ciò significa che il modello assunto nel paragrafo 124, che ha come soluzione la funzione esponenziale (124.5), è realistico solo se la popolazione non è troppo grande.

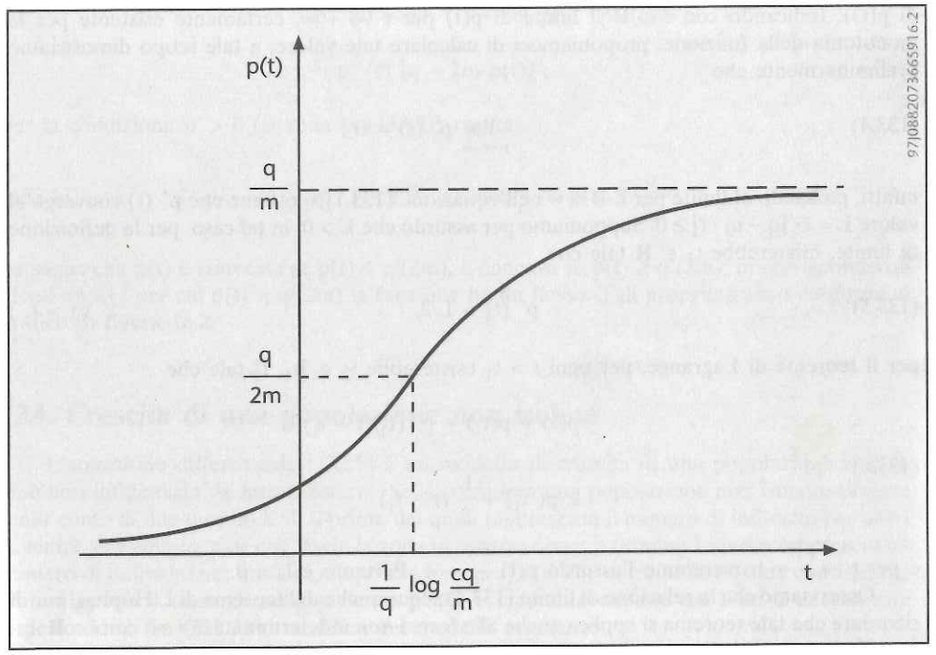


Figura 16.2