ESERCIZI PER IL CORSO GEOMETRIA

Questi fogli di esercizi sono pensati per uno studente di un corso di Geometria di un corso di laurea in Ingegneria. Sono esercizi in generale molto brevi e semplici che hanno lo scopo di far impratichire lo studente con le definizioni e i risultati che incontra a lezione. Dovrebbero quindi accompagnare lo studente durante le settimane di lezione ed essere affrontati parallelamente alla teoria, subito dopo aver studiato l'argomento corrispondente. Nella stragrande maggioranza dei casi, non sono esercizi belli nè eleganti e non richiedono trucchi o idee particolari per essere risolti ma solo di aver capito le definizioni e i teoremi incontrati a lezione. D'altro canto, gli esercizi raccolti in questi fogli sono più che sufficienti per prepararsi all'esame del corso.

1. Matrici

Esercizio 1.1. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcolare la matrice data dalla combinazione lineare di A, B e C con coefficienti 2, 3, -1, ovvero la matrice $2A + 3B + (-1)C$.

Esercizio 1.2. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, calcolare $(A^2 - 7B^3)C$.

Esercizio 1.3. Siano date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Verificare che $AB \neq BA$.

Esercizio 1.4. Sia A una matrice $n \times n$ e sia $B = rA + sI$, dove r e s sono numeri reali e I è la matrice identità $n \times n$. Dimostrare che A e B commutano.

Esercizio 1.5. Siano A e B due matrici $n \times n$. Spiegare perché, in generale, si ha $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$ e $A^2 - B^2 \neq (A - B)(A + B)$.

Esercizio 1.6. Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che $AB = BA = 0$, $AC = A$, $CA = C$.

(2) Usare i risultati di (1) per mostrare che
   - (a) $ACB = CBA$,
   - (b) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$,
   - (c) $(A + B)^2 = (A - B)^2 = A^2 + B^2$.

Esercizio 1.7. Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ il prodotto $\begin{pmatrix} x & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ è una matrice 1×1 con coefficiente positivo?

Esercizio 1.8. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$, calcolare, se esiste, una matrice $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, tale che $B^2 = A$. Stesso problema con $A = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Esercizio 1.9. Dimostrare che, se S è una matrice simmetrica, S^2 è simmetrica. Supponendo inoltre che S sia invertible, usare ${}^t(S^{-1}) = ({}^tS)^{-1}$ per dimostrare che S^{-1} è simmetrica.

Esercizio 1.10. Siano A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matrice identità 2×2.

(1) Calcolare $A^2 + 5A - 2I$.

(2) Verificare che $A^2 - 4A + I = 0$.

(3) Sfruttare l'uguaglianza precedente per calcolare l'inversa di A (nota: $4A = A \cdot 4I$).

2. Determinante e rango

Esercizio 2.1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.2. Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$. Usare quanto trovato per calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \qquad F = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.3. Sia A una matrice quadrata di ordine n. In quale relazione con $\det A$ sono $\det(5A)$, $\det(-A)$, $\det(kA)$, $\det(A^2)$, $\det(A^k)$?

Esercizio 2.4. Sia A una matrice antisimmetrica (ovvero tale che ${}^tA = -A$). Dimostrare che $\det(A) = 0$ se l'ordine della matrice è dispari.

Esercizio 2.5. Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ nei seguenti modi:

(1) con lo sviluppo secondo la prima riga,
(2) con lo sviluppo secondo la terza riga,
(3) con lo sviluppo secondo la terza colonna,
(4) usando il metodo di Gauss.

Esercizio 2.6. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare, fra i due prodotti AB e BA, quello eseguibile. Lo stesso per i prodotti $B^{-1}A$ e AB^{-1} .

Esercizio 2.7. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & t^2 & 0 \\ 3t-2 & 2 & 4t \\ 0 & t^2+4 & 0 \end{pmatrix}$$

è simmetrica? Per i valori di t così trovati dire se la corrispondente matrice è invertible.

Esercizio 2.8. Data $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, verificare che $(A^{-1})^2 = A$.

Esercizio 2.9. Verificare che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e calcolare la sua inversa.

Esercizio 2.10. Scrivere tutte le sottomatrici 3×3 e 2×2 della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e calcolarne i determinanti. Dedurne il rango di A.

Esercizio 2.11. Calcolare il determinante della sottomatrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Scrivere tutte le sottomatrici 3×3 di A. Usare il Teorema degli orlati per calcolare il rango di A.

Esercizio 2.12. Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 7 \\ 88 & 88 & 0 & 88 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sistemi lineari

Esercizio 3.1. Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - x_3 & = & 0 \end{cases}$$

(1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono soluzioni del sistema?

(2) Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la terna $\begin{pmatrix} k+2 \\ 1-5k \\ 2k-1 \end{pmatrix}$ è una soluzione del sistema?

Esercizio 3.2. Verificare che il sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & -1 \end{cases}$ nelle incognite x_1, x_2, x_3 ha matrice incompleta associata con determinante diverso da 0 e trovare la soluzione risolvendo il sistema sia per sostituzione che usando l'algoritmo di Cramer. Analogamente per il sistema omogeneo associato.

Esercizio 3.3. Risolvere i seguenti sistemi lineari:

(1) $\{\ x + 3y = 7$ nelle incognite x, y;

(2) $\{\ x + 3y = 7$ nelle incognite x, y, z;

(3) $\begin{cases} x + 3y & = & 7 \\ 3x - y & = & 2 \end{cases}$ nelle incognite x, y;

(4) $\begin{cases} x + 3y & = & 7 \\ 3x - y & = & 2 \end{cases}$ nelle incognite x, y, z;

Esercizio 3.4. Risolvere i seguenti sistemi lineari, di cui i primi due sono nelle incognite x_1, x_2, x_3 e i secondi due sono nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 8 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 & = & 18 \\ x_1 + x_2 + x_4 & = & 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_4 & = & 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Trovare tutte le colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tali che:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 18 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3.5. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, determinare una matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ tale che $AX = B$

Esercizio 3.6. Se $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 3y_3 \end{cases}$ e $\begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 \\ y_3 = 2z_1 + 3z_2 \end{cases}$ verificare che $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_1 + 7z_2 \\ -2z_1 - 6z_2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3.7. Determinare i valori del parametro reale α per cui ha soluzione il sistema $AX = B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Calcolare le soluzioni del sistema per tali valori di α.

Esercizio 3.8. Usando l'algoritmo di Gauss, ridurre ciascuna delle seguenti matrici a matrici a scalini:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Usando l'algoritmo di Gauss, risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x,y,z:

$$\begin{cases} y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 3 \\ 2x + 5y + z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 3z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Esercizio 3.9. Risolvere il seguente sistema (nelle incognite x, y) dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ky = 2 \\ kx + 2ky = 3k \end{cases}$$

(Nota: l'esercizio chiede di trovare tutte le soluzioni del sistema per ogni valore del parametro k.)

Esercizio 3.10. [1] Sia dato il seguente sistema (nelle incognite x_1, x_2, x_3) dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = k - 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 3 \end{cases}$$

(1) Scrivere la matrice incompleta e la matrice completa del sistema.

(2) Dire per quali valori di k il sistema ha una soluzione, infinite soluzioni, nessuna soluzione.

(3) Trovare, per ogni valore di k, l'insieme delle soluzioni.

(4) Trovare, per ogni valore di k, l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

---

[1] Questo è un esercizio del tipo di quelli proposti all'esame

4. Spazi vettoriali e sottospazi vettoriali

Esercizio 4.1. Dimostrare che $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_2 = x_1^2 + x_3 \}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.2. Determinare h e k in modo che il vettore ${}^t\begin{pmatrix} h & k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^4$ appartenga al sottospazio generato da ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4.3. Verificare che $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ è una base di $\mathbb{R}^2$. Trovare le coordinate di $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e rispetto alla base canonica.

Esercizio 4.4. Verificare che

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{e} \quad B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

sono due basi di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate dei vettori

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

rispetto a tali basi (osservare che le coordinate di $\vec{v}_4$ sono la somma delle coordinate di $\vec{v}_1$ e di quelle di $\vec{v}_2$). Determinare il vettore $\vec{u}_1$ che ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base B_1 e il vettore $\vec{u}_2$ che ha le stesse coordinate rispetto alla base B_2.

Esercizio 4.5. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = h \\ 2x_1 + x_2 = 7h \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 10h \end{cases}.$$

Determinare per quale valore di $h \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e determinare una base del sottospazio.

Esercizio 4.6. Verificare che $U = \{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ a_{11} + a_{12} = 0, \ a_{11} - a_{21} = 0 \}$ è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$ e trovarne una base. Dire se $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ formano una base di U.

Esercizio 4.7. Dimostrare che i vettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ che soddisfano l'equazione $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ formano un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^3$; determinare la dimensione e una base di W.

Esercizio 4.8. Verificare che $U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ : \ p(1) = 0, \ p(2) + p(-3) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

Esercizio 4.9. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, determinare una base dello spazio vettoriale $W = \{X \in \mathcal{M}_{3,1} \mid AX = 0\}$.

Esercizio 4.10. Determinare due basi distinte per lo spazio generato dalle colonne della matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
e la sua dimensione. Analogamente per lo spazio generato dalle righe.

Esercizio 4.11. Determinare una base per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:
$$W_1 = \left\{ {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \,:\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} ,$$
$$W_2 = \left\{ {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\} .$$
In entrambi i casi completare la base scelta a una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4.12. Verificare che i vettori $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti e completarli ad una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.13. Sia W il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$:
$$W = \operatorname{Span}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} h & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 1 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} .$$
Determinare la dimensione di W al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4.14. Verificare che $p_1(x) = x^2 - 2x + 1, p_2(x) = x^2 + 1, p_3(x) = x - 1$ sono una base di $\mathbb{R}_{<3}[x]$ (lo spazio vettoriale dei polinomi di grado < 3).

Esercizio 4.15. Determinare una base e la dimensione del sottospazio di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formato dalle matrici simmetriche. Stessa cosa per quello formato dalle matrici antisimmetriche.

Esercizio 4.16. Date le matrici
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$
determinare una base e la dimensione del sottospazio di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ da essi generato.

Esercizio 4.17. In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori
$$\vec{v}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ sono linearmente dipendenti.
(2) Determinare per quale valore del parametro reale k il vettore $\vec{v} = {}^t\begin{pmatrix} k+1 & 1-k & k \end{pmatrix}$ si può scrivere come combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e trovare tale combinazione lineare.
(3) Scrivere le equazioni cartesiane del sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^3$ generato da $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$.

Esercizio 4.18. Determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ in modo che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$
$$\vec{v}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = {}^t\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = {}^t\begin{pmatrix} -1 & 2 & k & k+7 \end{pmatrix}$$
siano linearmente dipendenti. Scrivere, in questo caso, equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio $U = \operatorname{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ e completare $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ a una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4.19. In $\mathbb{R}^3$, siano dati i sottospazi vettoriali

$$W_1 = \operatorname{Span}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad W_2 = \operatorname{Span}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Verificare che $W_1 = W_2$. Determinare inoltre se i vettori $\vec{w}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = {}^t\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ appartengono a W_1. Determinare equazioni parametriche e cartesiane di W_1.

Esercizio 4.20. Sono dati i vettori

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usando soltanto vettori dell'insieme $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_5\}$, scrivere:

(1) una base di $\operatorname{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_5)$,

(2) una base di $\mathbb{R}^3$,

(3) un insieme di vettori indipendenti che non formi una base di $\mathbb{R}^3$,

(4) un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ che non formi una base di $\mathbb{R}^3$.

5. Intersezione e somma di sottospazi vettoriali

Esercizio 5.1. Sia $E = \text{Span}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}\right\}$ e F il sottospazio di R^4 di equazione cartesiana $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$. Trovare una base e la dimensione dei sottospazi E, F, $E \cap F$, $E + F$.

Esercizio 5.2. In $\mathbb{R}^3$ sono dati il sottospazio E di equazione cartesiana $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, e il sottospazio $F = \text{Span}\left\{{}^t\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

(1) Determinare una base di E e una di F.
(2) Scrivere equazioni cartesiane per F.
(3) Trovare una base del sottospazio $E \cap F$ e del sottospazio $E + F$.

Esercizio 5.3. Sia (e_1, e_2, e_3) la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e siano $U = \text{Span}(e_1 + 2e_2 - e_3, e_1 - e_2 + 3e_3)$, $W = \text{Span}(2e_2 - e_3, e_1 - 7e_2 + 4e_3, e_1 - e_2 + e_3)$. Calcolare $\dim U$ e $\dim W$. Trovare una base dei sottospazi $U + W$ e una di $U \cap W$ e verificare la formula di Grassmann.

Esercizio 5.4. Sia (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e siano $U = \text{Span}(e_1 + e_4, e_1 - 2e_2 + 4e_3 + e_4, e_1 - e_2 + 2e_3 + e_4)$, $W = \text{Span}(e_1 - 4e_2 + e_4, e_1 - 2e_2 + e_3, e_1 - 2e_4)$. Calcolare $\dim U$ e $\dim W$. Trovare una base dei sottospazi $U + W$ e una di $U \cap W$ e verificare la formula di Grassmann.

Esercizio 5.5. Siano U e W i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ dati dalle soluzioni dei due sistemi lineari omogenei:

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{cases} \qquad W : \; x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Dimostrare che U e W sono supplementari. Scrivere il vettore $\vec{v} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ come somma di un vettore in U e di uno in W.

Esercizio 5.6. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \text{Span}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}\right\}, W_2 = \text{Span}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$W_3 = \left\{ {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \; : \; 2x_1 - x_4 = 0 \quad \text{e} \quad 5x_1 - x_3 = 0\right\}.$$

(1) Il vettore $\vec{z} = {}^t\begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 & 4 \end{pmatrix}$ appartiene a W_1? a W_2? a W_3?
(2) In ciascuno dei casi in cui la risposta è affermativa, esprimere $\vec{z}$ come combinazione lineare di una base scelta arbitrariamente.
(3) Determinare inoltre un supplementare per ciascuno dei sottospazi W_1, W_2, W_3.

6. Applicazioni lineari

Esercizio 6.1. Siano e_1, e_2, e_3 i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Verificare che i vettori $v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v_2 = e_1 + e_2 + e_3$, $v_3 = e_1 - 2e_3$ formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Calcolare le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di $w_1 = e_1 + e_2 - e_3$, di $w_2 = e_2 - 2e_3$ e di $w_3 = w_1 + w_2$ e verificare che le coordinate di w_3 sono la somma di quelle di w_1 e di w_2.

Esercizio 6.2. Verificare che i polinomi $p_1(t) = t^2 - 2t + 1$, $p_2(t) = t^2 + 4$, $p_3(t) = t^2 + t + 5$ formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}_{<3}[t]$ (lo spazio vettoriale dei polinomi di grado < 3). Calcolare le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di $q_1(t) = t^2 - 1$, di $q_2(t) = t - 2$ e di $q_3(t) = q_1(t) + q_2(t)$ e verificare che le coordinate di $q_3(t)$ sono la somma di quelle di $q_1(t)$ e di $q_2(t)$.

Esercizio 6.3. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare che soddisfa:

- $F\left({}^t(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix})\right) = {}^t(\begin{matrix} 2 & -1 & 1 & 0 \end{matrix})$,
- $F\left({}^t(\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \end{matrix})\right) = {}^t(\begin{matrix} -1 & 2 & 0 & -1 \end{matrix})$,
- $F\left({}^t(\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \end{matrix})\right) = {}^t(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \end{matrix})$.

(1) Scrivere la matrice di F rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.
(2) Scrivere l'immagine del generico vettore ${}^t(\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix})$ di $\mathbb{R}^3$.
(3) Determinare una base del nucleo di F.
(4) Determinare equazioni cartesiane dell'immagine di F e una sua base.
(5) Completare quest'ultima base ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 6.4. Sia $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare che soddisfa:

- $F\left({}^t(\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix})\right) = {}^t(\begin{matrix} 4 & 4 & 0 & 8 \end{matrix})$,
- $F\left({}^t(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix})\right) = {}^t(\begin{matrix} 2 & 0 & 4 & 0 \end{matrix})$,
- $F\left({}^t(\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{matrix})\right) = {}^t(\begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 0 \end{matrix})$,
- $F\left({}^t(\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix})\right) = {}^t(\begin{matrix} 1 & 3 & 5 & 1 \end{matrix})$.

Scrivere la matrice di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, sia come base del dominio che come base del codominio.

Esercizio 6.5. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcolare l'immagine del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ tramite l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ad essa associata. Determinare poi nucleo e immagine di L_A, scrivendone una base e verificando il Teorema Nullità + Rango. I sottospazi $\operatorname{Im} L_A$ e $\operatorname{Ker} L_A \subset \mathbb{R}^3$ sono supplementari?

Esercizio 6.6. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcolare l'immagine del vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ tramite l'applicazione lineare L_A ad essa associata. Trovare una base di $\operatorname{Ker} L_A$ e una di $\operatorname{Im} L_A$.

Infine, trovare una base del sottospazio vettoriale $L_A(W)$ immagine del sottospazio $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 4x_2 - x_3 = 0\}$.

Esercizio 6.7. Si considerino l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$F\left({}^t\!\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\right) = {}^t\!\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1 + x_3 & x_1 + x_2 \end{pmatrix},$$

e l'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ associata, nelle basi canoniche, alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Posto $H = G \circ F$, scrivere la matrice associata ad H rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 6.8. Sono dati i vettori $\vec{v}_1 = {}^t\!\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = {}^t\!\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = {}^t\!\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $F(\vec{e}_1) = \vec{v}_1$, $F(\vec{e}_2) = \vec{v}_2$, $F(\vec{e}_3) = \vec{v}_3$, dove $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Esistono valori del parametro reale k per i quali F è invertibile? In caso affermativo, determinare per tali valori la matrice che rappresenta l'applicazione inversa F^{-1} rispetto alla base canonica.

Esercizio 6.9. Sia $\mathbb{R}_{<4}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado < 4 e sia $T\colon \mathbb{R}_{<4}[t] \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione data da $T(p) = \begin{vmatrix} p(1) \\ p'(0) \\ p(-3) \end{vmatrix}$. Dimostrare che T è lineare, trovarne nucleo e immagine, verificando che $\mathrm{Ker}\ T = \{\alpha(2t^3 + 7t^2 - 9) \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 6.10. In $\mathbb{R}^3$, siano dati i vettori $\vec{v}_1 = {}^t\!\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = {}^t\!\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_3 = {}^t\!\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Verificare che $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ equiversa alla base canonica $\mathcal{E}$ (due basi si dicono equiverse se la matrice del cambiamento di base ha determinante positivo).

(2) Se un vettore $\vec{v}$ ha coordinate ${}^t(x_1, x_2, x_3)$ rispetto alla base $\mathcal{E}$, che coordinate ha rispetto alla base $\mathcal{B}$?

(3) Se un vettore $\vec{w}$ ha coordinate ${}^t(y_1, y_2, y_3)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, che coordinate ha rispetto alla base $\mathcal{E}$?

Determinare le formule di trasformazione di coordinate nel passaggio dalla base $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{B}$.

7. Autovettori e autovalori

Esercizio 7.1. Calcolare la matrice $A \in \mathcal{M}_2$ che ha autovettori $\vec{w}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{w}_2 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}$ associati, rispettivamente, agli autovalori 0 e 2.

Esercizio 7.2. Sia $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore tale che:

$$G\left({}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G\left({}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = G\left({}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere la matrice associata a G rispetto alle basi canoniche e scrivere l'immagine del generico vettore ${}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$.
(2) Determinare la controimmagine del vettore ${}^t\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e stabilire se essa è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
(3) Stabilire se G è diagonalizzabile.

Esercizio 7.3. Dire se le seguenti matrici sono diagonalizzabili:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7.4. Trovare autovalori ed autovettori di $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e determinare due diverse matrici che diagonalizzano A, ovvero due diverse matrici P tali che $P^{-1}AP$ è una matrice diagonale.

Esercizio 7.5. [2] Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore definito da

$$F\left({}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\right) = {}^t\begin{pmatrix} x_1 + x_3 & 2x_2 & x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere la matrice associata a F rispetto alla base canonica.
(2) Trovare il nucleo di F, una sua base e la sua dimensione.
(3) Dire se F invertibile.
(4) Trovare gli autovalori di F.
(5) Trovare gli autospazi di F.
(6) Dire se F è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare:
    (a) una forma diagonale di F,
    (b) una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F.

[2] Questo è un esercizio del tipo di quelli proposti all'esame

8. Prodotto scalare, proiezioni, basi ortogonali e ortonormali

Esercizio 8.1. Determinare i vettori di modulo 4 ortogonali al vettore ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e al vettore ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8.2. Dato il vettore $\vec{v} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$, determinare $\vec{w} \in \operatorname{Span}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ tale che risulti $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 1$.

Esercizio 8.3. Verificare che due vettori $\vec{x}$ e $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ soddisfano l'uguaglianza $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$ se e solo se $\vec{x} + \vec{y}$ è ortogonale a $\vec{x} - \vec{y}$.

Esercizio 8.4. Determinare i vettori di $\mathbb{R}^2$ il cui coefficiente di Fourier rispetto al vettore $\vec{u} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ sia $1/2$. Tra questi determinare quelli di modulo uguale a $(5/\sqrt{2})\|\vec{u}\|$.

Esercizio 8.5. Dati i vettori $\vec{u} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, determinare i vettori ortogonali a $\vec{w}$ la cui proiezione su $\vec{u}$ sia $(-1/5)\vec{u}$.

Esercizio 8.6. Scrivere la base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ che si ottiene applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base

$$\left({}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Calcolare le coordinate del vettore ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 8.7. Determinare una base ortonormale del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Completare tale base a una base ortonormale B di $\mathbb{R}^4$ e calcolare le coordinate di $\vec{w} = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto a B.

Esercizio 8.8. Determinare una base ortonormale $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ di $\mathbb{R}^3$ sapendo che:

(1) $\vec{v}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$,
(2) $\vec{v}_2 = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ soddisfa $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$,
(3) l'angolo tra $\vec{v}_2$ e $\vec{e}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è acuto.

Esercizio 8.9. Determinare il vettore proiezione ortogonale di $\vec{x} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ sul sottospazio vettoriale $\operatorname{Span}\{{}^t\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 8.10. Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\vec{v} = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sul sottospazio vettoriale $W = \left\{ {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \right\}$.

Esercizio 8.11. Dato il vettore $\vec{x} = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, determinare due vettori $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ tali che $\vec{x}_1 \in W = \operatorname{Span}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\vec{x}_2 \in W^\perp$ e $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

Esercizio 8.12. Sia $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo che ad ogni vettore $\vec{v} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ associa la sua proiezione ortogonale sul sottospazio $W = \{ {}^t(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Determinare la matrice A associata a $\mathcal{P}$ rispetto alla base canonica e verificare che $A^2 = A$.

Esercizio 8.13. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinare una base ortonormale di W, il complemento ortogonale $W^\perp$ e la proiezione ortogonale su W del vettore ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8.14. Determinare una base ortonormale $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sapendo che $\vec{u}_1$ appartiene al sottospazio $W_1 = \operatorname{Span}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$ e che $\vec{u}_2$ appartiene al sottospazio $W_2 = \operatorname{Span}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 8.15. Determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo tale che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & a \\ 1/\sqrt{3} & 0 & b \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & c \end{pmatrix}$$

sia ortogonale.

Esercizio 8.16. Determinare, se possible, α e $\beta \in \mathbb{R}$ in modo che la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{6} & 0 & \beta \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

sia ortogonale.

9. Geometria del piano

Negli esercizi di questa sezione, assumiamo di aver fissato nel piano un riferimento cartesiano $\mathrm{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. Gli esercizi contrassegnati con l'asterisco non sono in programma per i corsi da 6 CFU. Due basi si dicono equiverse se la matrice del cambiamento di base ha determinante positivo

Esercizio 9.1. Siano dati la retta $r : 2x + y - 5 = 0$ e il punto $A = {}^t(1, 0)$. Dire se i punti ${}^t(3, 2)$ e ${}^t(3, -1)$ appartengono a r. Determinare un vettore direttore di r e un vettore perpendicolare a r. Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta parallela a r passante per A e della retta perpendicolare a r passante per A.

Esercizio 9.2. Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r che passa per i punti $A = {}^t(2, 1)$ e $B = {}^t(5, 3)$. Determinare un vettore parallelo a r e un vettore perpendicolare a r. Determinare le intersezioni di r con l'asse x e l'asse y.

Esercizio 9.3. Dati il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la retta $r : 2x - y = 0$, determinare le coordinate dei punti B e C di r tali che $\overrightarrow{AB}$ sia parallelo al vettore $\vec{w} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ e l'angolo $\widehat{BAC}$ sia retto.

Esercizio 9.4. Siano dati i punti $O = {}^t(0, 0)$, $A = {}^t(1, 0)$, $B = {}^t(0, 1)$, $C = {}^t(h, k)$ con h, k parametri reali diversi da 1. Determinare:

a) il punto D intersezione della retta per O e A e della retta per B e C;

b) il punto E intersezione della retta per O e B e della retta per A e C.

Detti P, Q, R i punti medi rispettivamente dei segmenti $\overline{DE}, \overline{AB}, \overline{OC}$, verificare che P, Q, R sono allineati per ogni valore reale di $h, k \neq 1$.

Esercizio 9.5.* Dire se le rette $r : x+y+2 = 0$, $s : 2x-y-1 = 0$, $t : 4x+y+3 = 0$ appartengono ad uno stesso fascio.

Esercizio 9.6.* Nel fascio di rette generato dalle rette di equazione cartesiana $x - y = 0$ e $3x - y + 2 = 0$, determinare:

a) la retta parallela al vettore $\mathbf{v} = {}^t(2, 1)$;

b) la retta ortogonale al vettore $\mathbf{w} = {}^t(0, 1)$.

Esercizio 9.7.* Determinare il centro C del fascio di rette $h(y + 2) + k(x + y + 1) = 0$, dove $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Determinare la retta s del fascio perpendicolare a $r : 2x + y - 5 = 0$ ed il punto $T = r \cap s$. Determinare inoltre su r un punto P tale che l'area del triangolo PTC sia uguale a 5.

Esercizio 9.8. Determinare la retta r passante per $A = {}^t(2, -1)$ e $B = {}^t(-1, 2)$. Determinare il punto P simmetrico dell'origine O rispetto ad r. Verificare che il quadrilatero $AOBP$ è un rombo e calcolarne l'area.

Esercizio 9.9. Dati il punto $P = {}^t(2, -1)$ e la retta $r : 3x - 2y + 5 = 0$ determinare:

a) un vettore direttore di r e un vettore perpendicolare a r;

b) equazioni parametriche della retta s passante per P e perpendicolare a r;

c) il punto di intersezione tra r e s;

d) la distanza di P da r;

e) i punti di s che hanno distanza $\sqrt{13}$ da r;

f) le equazioni parametriche e cartesiane delle rette parallele a r e aventi da essa distanza $\sqrt{13}$.

Esercizio 9.10. Dati i punti $P = {}^t(2, 0)$, $Q = {}^t(-1, 1)$ e la retta $r : 5x - y = 0$, determinare:

a) i punti appartenenti all'asse del segmento $\overline{PQ}$ ed aventi distanza $d = \frac{2}{\sqrt{26}}$ dalla retta r;

b) il coseno dell'angolo acuto formato dalla retta per P e Q e la retta r.

Esercizio 9.11. Siano $A = {}^t(1, -1)$ e $B = {}^t(-3, 1)$ gli estremi della base maggiore di un trapezio rettangolo $ABCD$ nel quale la diagonale maggiore $\overline{BD}$ è parallela al vettore $\mathbf{v} = {}^t(3, -4)$ e la diagonale minore è ortogonale a $\mathbf{v}$. Determinare le coordinate dei vertici C e D.

Esercizio 9.12. Dati i punti $A = {}^t(-1, 1)$ e $B = {}^t(2, -3)$, determinare i punti C tali che il triangolo ABC sia isoscele sulla base $\overline{AB}$ e di area 25.

Esercizio 9.13. Dato il triangolo di vertici $A = {}^t(2, 0)$, $B = {}^t(0, 2)$ e $C = {}^t(-2, -2)$, calcolare le coordinate del suo baricentro e del suo ortocentro. Calcolare inoltre il perimetro e l'area del triangolo.

Esercizio 9.14. Dati i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, determinare un punto D in modo che A, B, D e C siano, in questo ordine, i vertici di un parallelogramma. Calcolare l'area del parallelogramma e la sua altezza rispetto alla base $\overline{AB}$.

Esercizio 9.15. Sono dati i punti $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Verificare che la retta r passante per P_1 e P_2 è parallela alla retta $r' :\ 2x - y - 5 = 0$.

b) Scrivere l'equazione cartesiana della retta n passante per l'origine O e perpendicolare ad r.

c) Detti H ed A i punti intersezione di n con r ed r' rispettivamente, verificare che H è il punto medio del segmento $\overline{AB}$, dove $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

d) Determinare il punto C del I quadrante tale che il triangolo di vertici A, B, C sia isoscele sulla base $\overline{AB}$ e di lato $\overline{AC} = 10\sqrt{2}$.

e) Scrivere l'equazione cartesiana della circonferenza passante per i punti O, P_1, P_2.

Esercizio 9.16. Scrivere l'equazione cartesiana della retta r passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e con vettore direttore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calcolare le coordinate dei punti A e B intersezioni di r con gli assi x ed y. Scrivere l'equazione cartesiana della retta s passante per l'origine O e perpendicolare ad r.

Determinare su s il punto C di ascissa positiva tale che il triangolo ABC abbia area 9. Scrivere l'equazione cartesiana della circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

Esercizio 9.17. Sono dati i due punti $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Verificare che il punto $H = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è allineato con P_1, P_2 e scrivere l'equazione cartesiana della retta r che passa per tali punti.

(b) Calcolare le coordinate del punto A simmetrico dell'origine O rispetto ad H e scrivere l'equazione cartesiana della retta s passante per O e perpendicolare ad r.

(c) Determinare su r il punto B di ascissa positiva tale che l'area del triangolo OAB sia 20.

(d) Scrivere l'equazione cartesiana della circonferenza circoscritta al triangolo OAB.

Esercizio 9.18. Scrivere l'equazione cartesiana della retta r passante per $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e della retta n passante per l'origine O e perpendicolare ad r. Determinare su n il punto C di ascissa positiva e che dista $5\sqrt{2}$ da A. Scrivere inoltre l'equazione cartesiana della circonferenza di centro C e tangente ad r. Determinare infine un punto D in modo che A, B, C e D siano, in questo ordine, i vertici di un parallelogramma. Calcolare l'area di tale parallelogramma.

Esercizio 9.19. Sia $F_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'operatore che associa al vettore $\vec{v}$ il vettore $F_1(\vec{v})$ che si ottiene da $\vec{v}$ ruotandolo di $\frac{\pi}{4}$ in senso antiorario e sia $F_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'operatore che associa al vettore $\vec{v}$ il suo simmetrico rispetto alla retta $x - y = 0$. Calcolare $F_2 \circ F_1$ e $F_1 \circ F_2$.

Esercizio 9.20.* Determinare le formule di trasformazione delle coordinate di punto nel passaggio dal riferimento cartesiano $RC(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ad un riferimento cartesiano equiverso $RC(O'; \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$ sapendo che $\vec{\jmath}'$ è il versore della retta $r : x + 2y = 0$ orientata secondo le y crescenti e che il punto A ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nel primo e $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ nel secondo riferimento. Determinare inoltre le coordinate di O' in $RC(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Determinare infine l'equazione in $RC(O'; \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$ della retta $s : x - y = 0$.

Esercizio 9.21.* Determinare le formule di trasformazione delle coordinate di punto nel passaggio dal riferimento cartesiano $RC(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ad un riferimento cartesiano equiverso $RC(O'; \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$ sapendo che il punto O' ha coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto ad $RC(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ e che $\vec{\imath}'$ si ottiene da $\vec{\imath}$ ruotandolo in senso antiorario di $\frac{\pi}{3}$.

Esercizio 9.22.* Determinare le formule di trasformazione delle coordinate di punto nel passaggio dal riferimento cartesiano $RC(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ad un riferimento cartesiano contraverso $RC(O'; \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$ sapendo che l'asse x' è la retta $r : 2x - y = 0$ orientata secondo le x crescenti e che il punto P ha coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $RC(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ e $\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ in $RC(O'; \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$. Determinare infine l'equazione in $RC(O'; \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$ della retta $s : x - y = 0$.

Esercizio 9.23.*[3] Sia $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'operatore rappresentato nella base canonica dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare una base ortonormale di autovettori di T.

(b) Verificare se la conica $\mathcal{C}: \ x^2 - 4xy - 2y^2 - 6 = 0$ è generale o degenere.

(c) Determinare l'equazione canonica di $\mathcal{C}$.

(d) Determinare le equazioni cartesiane degli eventuali assi di simmetria

di $\mathcal{C}$.

Esercizio 9.24.* Data la conica $\mathcal{C}: \ 3x^2 + 10xy + 3y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$:

(a) verificare che $\mathcal{C}$ è una conica generale,

(b) determinare se $\mathcal{C}$ è un'ellisse, iperbole o parabola,

(c) determinare l'equazione canonica di $\mathcal{C}$,

(d) determinare un riferimento cartesiano $RC(O'; \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$ in cui $\mathcal{C}$ abbia equazione canonica.

[3] La classificazione euclidea delle coniche non è nel programma dei corsi da 6 CFU

10. Geometria dello spazio

Negli esercizi di questa sezione, assumiamo di aver fissato nello spazio un riferimento cartesiano RC$(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Gli esercizi contrassegnati con l'asterisco non sono in programma per i corsi da 6 CFU.

Esercizio 10.1. Verificare che i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono vertici di un triangolo isoscele rettangolo in A. Determinare il punto D in modo che $ABCD$ sia un quadrato.

Esercizio 10.2. Determinare il piano π contenente le rette $r : \begin{cases} x + z - 1 & = 0 \\ 2x - y & = 0 \end{cases}, s : \begin{cases} z & = 0 \\ x + y - 3 & = 0 \end{cases}$. Verificare che il vettore $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$ è parallelo a π e scomporlo nella somma $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ con $\vec{v}_1 \mathbin{//} r$ e $\vec{v}_2 \mathbin{//} s$.

Esercizio 10.3. Verificare che le rette

$$r : \begin{cases} x & = t \\ y & = -2t \\ z & = -2t \end{cases} \quad \text{ed} \quad s : \begin{cases} 2x - 2y + 3z - 4 & = 0 \\ y - z - 2 & = 0 \end{cases}$$

sono parallele e distinte. Determinare l'equazione del piano che le contiene.

Esercizio 10.4. Sia α il piano contenente i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Determinare la retta s contenuta in α, incidente la retta $r : \begin{cases} x & = 2z - 1 \\ y & = z \end{cases}$ e parallela a $\overrightarrow{AB}$.

Esercizio 10.5. Verificare che le rette $r_1 : \begin{cases} x + z - 1 & = 0 \\ y + 2z & = 0 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} x & = 0 \\ y - z + 3 & = 0 \end{cases}$ sono incidenti, calcolare le coordinate del loro punto di intersezione e l'equazione del piano che le contiene.

Esercizio 10.6. [4] Siano dati i punti $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(1) Verificare che A e C appartengono al piano $\pi : 2x - 5y + z + 11 = 0$.
(2) Determinare equazioni cartesiane della retta r asse del segmento AC nel piano π.
(3) Verificare che $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ appartiene ad r.
(4) Determinare D in modo che A, B, C e D siano, in questo ordine, i vertici di un rombo.
(5) Calcolare l'area di tale rombo.

Esercizio 10.7. Dati i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, verificare che il vettore $\overrightarrow{AB}$ è parallelo al piano $\pi : 2x - y + 3z - 1 = 0$. Determinare su π i punti C, D tali che $ABCD$ sia un parallelogramma con i lati AC e BD paralleli al vettore $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{k}$. Scomporre inoltre il vettore $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ nella somma di un vettore parallelo a $\vec{v}$ e di un vettore parallelo a π.

[4] Questo è un esercizio del tipo di quelli proposti all'esame

Esercizio 10.8.* Determinare la retta r passante per $P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, parallela al piano π : $2x - 3y + 5z = 0$ ed incidente l'asse z. (2 modi possibili: costruzione di piani; metodo del punto mobile)

Esercizio 10.9.* Determinare la retta r parallela alla retta $s : \begin{cases} 3x - y + 2z & = 0 \\ x + 4z + 1 & = 0 \end{cases}$ ed incidente sia $s_1 : \begin{cases} x - y & = 0 \\ x + 2y - z & = 0 \end{cases}$ che $s_2 : \begin{cases} z & = 0 \\ x + z - 1 & = 0 \end{cases}$.

Esercizio 10.10.* Determinare equazioni cartesiane della retta r' proiezione ortogonale della retta $r : \begin{cases} x - z + 2 & = 0 \\ x + y + z - 1 & = 0 \end{cases}$ sul piano $\alpha : 2x - y + z - 3 = 0$. Posto $A = r \cap \alpha$, determinare su r un punto B tale che, detta C la sua proiezione ortogonale su α, il triangolo ABC abbia area $\frac{5\sqrt{11}}{12}$.

Esercizio 10.11. Determinare il piano α contenente la retta $r : \begin{cases} 2x - y & = 0 \\ x + z & = 0 \end{cases}$ e parallelo alla retta $s : \begin{cases} x - z & = 0 \\ 2y + z & = 0 \end{cases}$.

Esercizio 10.12. Determinare il piano π' simmetrico di $\pi : x - 2y - z + 2 = 0$ rispetto al punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Detti B e B' i punti di intersezione della retta $r : \begin{cases} x - y + 2 & = 0 \\ y + 2z - 1 & = 0 \end{cases}$ con π e π', determinare le coordinate del baricentro del triangolo ABB'.

Esercizio 10.13.* Sia $\mathcal{F}$ il fascio di rette di centro $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e giacente sul piano $\alpha : x - y + 2z - 4 = 0$. Determinare la retta r di $\mathcal{F}$ parallela al piano $\beta : x + 3y - z - 1 = 0$. Determinare inoltre la retta n di $\mathcal{F}$ perpendicolare alla retta $s = \alpha \cap \beta$.

Esercizio 10.14.* Verificare che le rette $r : \begin{cases} x - 2z + 1 & = 0 \\ y + z - 1 & = 0 \end{cases}$ e $r' : \begin{cases} x - z - 1 & = 0 \\ y - 2z - 1 & = 0 \end{cases}$ sono sghembe. Determinare la retta s passante per l'origine O ed incidente sia r che r' e trovare i punti di intersezione di s con r e con r'. Determinare il piano π passante per O e parallelo a r e r'.

Esercizio 10.15. Verificare che le rette

$$r : \begin{cases} x - y & = 0 \\ x - z & = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s : \begin{cases} 2x + z - 1 & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$$

sono sghembe. Calcolare il coseno dell'angolo $\widehat{rs}$ con r orientata secondo le x crescenti ed s orientata secondo le x decrescenti. Determinare le coordinate di un vettore $\vec{n}$ che sia perpendicolare sia ad r che ad s. Determinare le equazioni cartesiane dei piani (paralleli tra loro) α e α' contenenti rispettivamente r ed s e perpendicolari ad $\vec{n}$. Calcolare la distanza fra α e α'.

Esercizio 10.16. [5] Siano dati il punto $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e la retta $r : \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano α contenente P_0 e r.

---

[5] Questo è un esercizio del tipo di quelli proposti all'esame

(b) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r' passante per P_0 e parallela ad r.

(c) Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per P_0 e che sia perpendicolare ed incidente ad r.

(d) Determinare un vettore direttore $\vec{v}$ di r in modo che il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \overrightarrow{OP_0}$ abbia lunghezza $5\sqrt{2}$ (O indica l'origine delle coordinate).

Mario Marietti, Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche, Università Politecnica delle Marche, Via Brecce Bianche, 60131 Ancona, Italy