

Geometria

Prof. Mario Marietti

Esame¹

Il candidato è invitato a redigere l'elaborato con ordine e completezza dando breve indicazione dei calcoli eseguiti e giustificando le risposte. Nel giudizio sarà tenuto conto della chiarezza dell'esposizione. È vietato tenere con sé calcolatrici, testi, appunti e fogli diversi da quelli ricevuti dalla Commissione. Chi non si attenga scrupolosamente a queste norme, o comunichi con altri candidati, sarà escluso dall'esame.

Esercizio 1. Si dia la definizione di matrice simmetrica reale di ordine n . Si dimostri che l'insieme delle matrici simmetriche reali di ordine n forma un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n .

Sia L l'operatore lineare su \mathbb{R}^3 cui viene associata, nelle basi canoniche, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Trovare la controimmagine del vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- (b) Trovare gli autovalori di L e, per ogni autovalore, il relativo autospazio.
- (c) Si dica se L è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una forma diagonale e una base di autovettori.

Esercizio 2. Sia F l'applicazione lineare da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 tale che

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Scrivere la matrice associata a F nelle basi canoniche.
- (b) Trovare una base di $\text{Im}(F)$.
- (c) Trovare equazioni cartesiane dell'immagine di F .
- (d) Trovare 5 vettori appartenenti a $\text{Im}(F)$ che generino $\text{Im}(F)$.
- (e) Trovare 2 vettori appartenenti a $\text{Im}(F)$ che siano linearmente dipendenti.

Esercizio 3. Nel piano, con riferimento cartesiano $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, si considerino i quattro punti $P = (2, 0)$, $Q = (1, 0)$, $R = (0, 1)$ ed $S = (0, 2)$.

- (a) Verificare che P , Q , R ed S appartengono ad una stessa circonferenza \mathcal{C} , e scrivere l'equazione cartesiana di \mathcal{C} .
- (b) Trovare il centro e il raggio di \mathcal{C} .
- (c) Trovare il perimetro e l'area del quadrilatero $PQRS$.

Esercizio 4. Nello spazio, con riferimento cartesiano $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y - 3z = 0. \end{cases}$$

- (a) Verificare che le rette r e s sono sghembe.
- (b) Determinare dei versori direttori di r e s .
- (c) Scrivere equazioni parametriche di r e s .
- (d) Trovare un vettore perpendicolare sia a r che a s .
- (e) Determinare la distanza tra le rette r e s .

Esercizio 5. Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + (3 - k)z = 1 \\ kx + y + kz = 2 \\ kx + kz = 2 \end{cases}$$

di tre equazioni nelle tre incognite x , y e z , dipendente dal parametro reale k .

- (a) Scrivere la matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema.
- (b) Calcolare il determinante della matrice dei coefficienti in funzione di k .
- (c) Dire per quali valori del parametro k il sistema ammette nessuna, solo una, infinite soluzioni.
- (d) Per ogni valore del parametro k , determinare le soluzioni del sistema.