Classificazione euclidea delle coniche

Corso: Geometria
Docente: Mario Marietti

Lo scopo di questi fogli è di dare allo studente di corsi di Laurea della Facoltà di Ingegneria l'idea di cosa voglia dire e di come si possa fare la classificazione delle coniche a meno di isometrie del piano. La rigorosità e la completezza delle argomentazioni sarà riservata ad altre occasioni.

Supponiamo di aver fissato un riferimento cartesiano $RC(O, \vec{i}, \vec{j})$ del piano.

Definizione. Sia $p(x, y)$ un polinomio di secondo grado (a coefficienti in $\mathbb{R}$). La conica $\mathcal{C}_p$ di equazione p è l'insieme dei punti le cui coordinate soddisfano $p(x, y) = 0$.

La conica non cambia se la sua equazione viene moltiplicata per un numero $k \neq 0$.

Esempi.

1. *Ellissi, iperboli e parabole sono coniche.*
2. *L'insieme vuoto è una conica (di equazione, ad esempio,* $x^2 + y^2 + 1 = 0$ *o* $y^2 + p^2 = 0$*).*
3. *L'equazione* $x^2 - y^2 = 0$ *dà una conica che è l'unione delle due rette* $x + y = 0$ *e* $x - y = 0$*.*
4. *L'equazione* $x^2 + 2xy + y^2 = 0$ *dà una conica che è la retta* $x + y = 0$ *(contata due volte).*

Alla conica $\mathcal{C}_p$ di equazione

$$p(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

associamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dove $a_{10} = a_{01}$, $a_{20} = a_{02}$, e $a_{21} = a_{12}$. L'equazione della conica $\mathcal{C}_p$ può essere scritta in forma compatta nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Esempio. *La conica di equazione* $3x^2+6xy+4x+y+5=0$ *ha, come matrice associata, la matrice*

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1/2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1/2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi equazione compatta

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1/2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1/2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Se moltiplichiamo il polinomio della conica per k, la matrice associata viene moltiplicata per k.

Definizione. La conica $\mathcal{C}$ con matrice associata A si dice generale se $rgA = 3$, semplicemente degenere se $rgA = 2$, doppiamente degenere se $rgA = 1$.

Teorema *Sia* $A^{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *il complemento algebrico di* a_{00}*. Se* $\det A^{00} \neq 0$*, la conica* $\mathcal{C}$ *ha un centro di simmetria, che è il punto*

$$x_c = \frac{-\det \begin{pmatrix} a_{10} & a_{12} \\ a_{20} & a_{22} \end{pmatrix}}{\det A^{00}} \qquad y_c = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \end{pmatrix}}{\det A^{00}}$$

(i numeratori sono i complementi algebrici di a_{01} *e* a_{02}*).*
Se $\det A^{00} = 0$*, la conica* $\mathcal{C}$ *non ha un centro di simmetria ma ha un asse di simmetria: l'equazione cartesiana di* $\mathcal{C}$ *è del tipo*

$$p(x,y) = (ax+by)^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

e l'asse di simmetria ha equazione

$$a\frac{\partial p}{\partial x} + b\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Definizione. Una conica si dice

- ellisse generalizzata se $\det A^{00} > 0$,
- parabola generalizzata se $\det A^{00} = 0$,
- iperbole generalizzata se $\det A^{00} < 0$.

Teorema *In un riferimento cartesiano* $\mathbf{RC}(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$*, sia data la conica* $\mathcal{C}$ *di equazione* $p(x,y)=0$*. Esiste un riferimento cartesiano* $\mathbf{RC}(O';\vec{\imath'},\vec{\jmath'})$ *in cui l'equazione* $p(x(x',y'),y(x',y'))=0$ *di* $\mathcal{C}$ *è*

- *una di quelle in tabella, se* $\mathcal{C}$ *ha almeno un punto,*
- $(x/a)^2+(y/b)^2=-1$ *(ellisse generale senza punti) o* $y^2=-p^2$ *(parabola semplicemente degenere senza punti), se* $\mathcal{C}=\emptyset$*.*

	generale ($\det A \neq 0$)	degenere ($\det A = 0$)	
		semplicemente ($\mathrm{rg}A=2$)	doppiamente ($\mathrm{rg}A=1$)
ellisse ($\det A_0>0$)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a \geqslant b>0$)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (un punto)	-
parabola ($\det A_0=0$)	$y^2-2px=0$ ($p>0$)	$y^2=p^2$ (due rette parallele)	$y^2=0$ (due rette coincidenti)
iperbole ($\det A_0<0$)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0,\ b>0$)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (due rette incidenti)	-

Diamo un metodo per trovare un riferimento cartesiano $\mathbf{RC}(O';\vec{\imath'},\vec{\jmath'})$ rispetto al quale $\mathcal{C}$ assume la sua forma canonica. Bisogna distinguere tre casi.

Caso $\mathcal{C}$ generale. Poiché A^{00} è simmetrica, per il Teorema Spettrale esiste una base ortonormale composta da autovettori di A^{00}. Scegliamo come $\vec{\imath'}$ e $\vec{\jmath'}$ i vettori di tale base, mentre l'origine O' è

$$O'=\begin{cases}\text{il centro di } \mathcal{C}, & \text{se } \mathcal{C} \text{ è a centro (ellisse o iperbole),}\\ \text{il vertice di } \mathcal{C}, & \text{se } \mathcal{C} \text{ non è a centro (parabola).}\end{cases}$$

Otteniamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

dove la matrice dei p_{ij} è la matrice che cambia le coordinate dalla base nuova alla base vecchia e $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ è la colonna delle coordinate di O' rispetto al vecchio riferimento. Dunque le espressioni che danno x e y in funzione di x' e y' sono:

$$\begin{cases} x = p_{11}x' + p_{12}y' + c_1 \\ y = p_{21}x' + p_{22}y' + c_2 \end{cases}$$

Sostituendo dentro il polinomio $p(x, y)$ otteniamo l'equazione della conica $\mathcal{C}$ nel nuovo riferimento, quindi rispetto a x' e y'. Questa è l'equazione canonica della conica $\mathcal{C}$ oppure lo è una volta scambiate le ascisse con le ordinate.

Caso $\mathcal{C}$ semplicemente degenere. Se $\mathcal{C}$ è a centro, si procede come nel caso $\mathcal{C}$ generale. Se $\mathcal{C}$ non è a centro e quindi è una parabola semplicemente degenere, poniamo l'asse di simmetria di $\mathcal{C}$ come asse delle x' e come O' un qualsiasi punto dell'asse.

Caso $\mathcal{C}$ doppiamente degenere. Sappiamo già che $\mathcal{C}$ è una parabola e che la forma canonica sarà $y'^2 = 0$. Comunque l'equazione nel vecchio riferimento è un quadrato perfetto, quindi è il quadrato dell'equazione di una retta. Si prende tale retta come asse delle x' e come O' un punto qualsiasi dell'asse.

Esercizio. Determinare l'equazione canonica della conica $\mathcal{C}$ di equazione $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 10y + 7 = 0$ e il riferimento cartesiano rispetto al quale $\mathcal{C}$ ha tale forma.
Svolgimento. La matrice associata a $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $\det A = -32 \neq 0$ e $\det A^{00} = 8 > 0$, $\mathcal{C}$ è un'ellisse generale.

Gli autovalori di A^{00} sono 2 e 4 e gli autospazi sono, rispettivamente, $Span \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $Span \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La base del nuovo riferimento cartesiano è dunque $\vec{i'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ e $\vec{j'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Il centro di simmetria, ovvero 0', è $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dunque

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - 1 \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + 2 \end{cases}$$

Se sostituiamo nel polinomio otteniamo: $3(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - 1)^2 + 2(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - 1)(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + 2) + 3(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + 2)^2 + 2(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - 1) - 10(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + 2) + 7 = 0$ che, semplificando, diventa $2x'^2 + 4y'^2 - 4 = 0$. Dividendo per 4 si ottiene la forma canonica di $\mathcal{C}$:

$$\frac{x'^2}{2} + y'^2 = 1.$$