Correzione Appello Straordinario 14/12/13 ANALISI 2 BIO (1)

1) $f(x,y) = \operatorname{senh}(x^2+|y|^3-xy)$, $\left(\operatorname{senh} s = \dfrac{e^s - e^{-s}}{2}\right)$

a - Continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}^2$.

(1) f è CONTINUA su tutto $\mathbb{R}^2$ poiché composizione di funzioni continue ($x^2+|y|^3-xy$ è continua poiché somma di funzioni continue, $\operatorname{senh}(s)$ è continua)

(2) Notiamo che la funzione $p(x,y) = |y|^3$ è differenziabile su $\mathbb{R}^2$. Infatti, per $y \neq 0$, ciò segue dai fatti noti circa le potenze. Per $y=0$ si ha, fissato x,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial x}(x,0) = 0 \quad (p \text{ non dipende da } x) \\ &\frac{\partial p}{\partial y}(x,0) = \lim_{k\to 0} \frac{|k|^3}{k} = \lim_{k\to 0} k|k| = 0. \end{aligned}\right\} \text{ per ogni } x,\ \nabla p(x,0) = (0,0)$$

Pertanto,

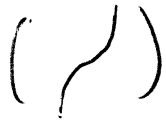
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{p(x+h,k) - p(x,0) - \cancel{\frac{\partial p}{\partial x}(x,0)}h - \cancel{\frac{\partial p}{\partial y}(x,0)}k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|k|^3}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$ (come si vede passando a coordinate polari, $h=\rho\cos\theta$, $k=\rho\operatorname{sen}\theta$)

Segue che p è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

Perciò, $f(x,y)$ è differenziabile ($\Rightarrow$ derivabile) su tutto $\mathbb{R}^2$ ($x^2+|y|^3-xy$ è somma di funzioni differenziabili e viene composta con $\operatorname{senh}(s)$, di classe C^1), b – È possibile ricondurre le ricerca di massimi e minimi di f alle ricerca di massimi e minimi di

$$g(x,y) = x^2 + |y|^3 - xy$$

poiché $\operatorname{senh}(s)$ è una funzione $\boxed{\text{CRESCENTE}}$ (strettamente) in s. 

- Perciò, se $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ è tale che $\exists\, \mathcal{U} = \mathcal{U}_{(x_0,y_0)}$ per cui

(x_0,y_0) MINIMO per g
$$g(x_0,y_0) \leq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{U}_{(x_0,y_0)} \overset{\text{applico senh}}{\Longrightarrow} \operatorname{senh}(g(x_0,y_0)) \leq \operatorname{senh}(g(x,y))$$
$$f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{U}$$
$\rightarrow (x_0,y_0)$ MINIMO per f

$$\left(g(x_0,y_0) \geq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{U}_{(x_0,y_0)} \Rightarrow \operatorname{senh}(g(x_0,y_0)) \geq \operatorname{senh}(g(x,y)) \right.$$
(x_0,y_0) MASSIMO per g
$$\left. f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{U} \right)$$
$\rightarrow (x_0,y_0)$ MASSIMO per f

Si ragiona in maniera analoga per le selle, poiché le disuguaglianze sono ugualmente conservate componendo con senh

$$\left(g(x^+,y^+) > g(x_0,y_0) > g(x^-,y^-) \Rightarrow f(x^+,y^+) > f(x_0,y_0) > f(x^-,y^-) \right)$$

- Essendo senh invertibile con inversa crescente (poiché $\operatorname{senh}(s)$ è una funzione crescente), si ha anche che

(x_0,y_0) MINIMO per f
$$f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{U}, \quad \text{cioè } \operatorname{senh}(g(x_0,y_0)) \leq \operatorname{senh}(g(x,y)) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{U}$$

$$\overset{\text{APPLICO INVERSA crescente}}{\Longrightarrow} g(x_0,y_0) \leq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{U} \Rightarrow (x_0,y_0) \text{ MINIMO per } g.$$

(lo stesso vale per massimi e selle).

Vi è cioè piena coincidenza tra massimi, minimi e selle di $f(x,y)$ e massimi, minimi e selle di $g(x,y)$.

c- Trovare i punti critici di $g(x,y)$.

Si noti che la derivata di $h(s) = |s|^3$ è $h'(s) = \begin{cases} 3s^2 & s>0 \\ -3s^2 & s<0 \end{cases}$ (*), con $h'(0) = 0$ perché h è C^1 (si vede anche con un calcolo diretto mediante la def di derivata).

Pertanto, $h'(s) = 3s|s|$.

Si ha allora

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-y \\ 3y|y|-x \end{pmatrix}; \quad \text{perciò } Dg(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ 3y|y|-x=0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} y = 2x \\ 12x|x| - x = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (x \geq 0) \ \ 12x^2 - x = 0; \ \ x=0 \vee x = \frac{1}{12} \text{ accettab. } (x \geq 0) \\ (x<0) \ -12x^2 - x = 0; \ (x=0 \vee) \ x = -\frac{1}{12} \text{ accettab. } (x<0) \end{matrix}$$

Pertanto, i punti critici di g sono

$O(0,0)$, $P_1\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$, $P_2\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right)$

- $g(0) = 0$
- $g(P_1) = (-1/432) = g(P_2)$

Osservo che g è C^2 (infatti la funzione $|y|^3$ è C^2, perché $3y|y|$ è derivabile in 0), calcoliamo l'Hessiana di g:

$$Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6|y| \end{pmatrix}$$

(si noti che il termine di posto (2,2) si può calcolare derivando h' sopra (*), avendo preventivamente osservato che essa è derivabile in 0)

Si ha:

$$\det Hg(x,y)\Big|_{(0,0)} = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow (0,0) \text{ è una sella}$$

(si vede anche lungo le direzioni $y=0$ (min) e $y=2x$ (max))

$\det Hg(x,y)\Big|_{\left(\frac{1}{12},\frac{1}{6}\right)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$ e il termine di posto $(1,1)$ è positivo

$\Rightarrow \left(\frac{1}{12},\frac{1}{6}\right)$ MINIMO

$\det Hg(x,y)\Big|_{\left(-\frac{1}{12},-\frac{1}{6}\right)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$ MINIMO (stesso valore)

(si noti che g è invariante se si cambiano contemporaneamente i segni di x e di y, quindi a quest'ultima conclusione si perviene anche ragionando per simmetria).

2) a- Calcolare $\mathcal{L}[1](s)$.

Si ha $\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt = \lim_{w\to+\infty}\int_0^w e^{-st}\,dt = \lim_{w\to+\infty} -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^w =$

$= \lim_{w\to+\infty}\Big[\underbrace{\frac{-e^{-wt}}{s}}_{\to 0} + \frac{1}{s}\Big] = \frac{1}{s}.$

b- Ricordiamo le proprietà differenziali della trasformata:

$\mathcal{L}[y'](s) = s\mathcal{L}[y]s - y(0)$, da cui $\mathcal{L}[y''](s) = \mathcal{L}[(y')'](s) = s\,\mathcal{L}[y'](s) - y'(0) =$

$= s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0) - y'(0)$, e $\mathcal{L}[y'''](s) = \dots = s^3\mathcal{L}[y](s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)$,

Per risolvere $\begin{cases} y''' - 2y' + y = 1 - 2e^{-t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -1 \end{cases}$, trasformiamo perciò

ambo i membri sfruttando la linearità della trasformata

$s^3\mathcal{L}[y](s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) - 2[s\mathcal{L}[y](s) - y(0)] + \mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s} - \mathcal{L}[2e^{-t}](s),$

e, osservato che $\mathcal{L}[2e^{-t}](s) = 2\mathcal{L}[e^{-t}](s) = 2\mathcal{L}[1](s+1) =$ ③

$= \dfrac{2}{s+1}$ per la proprietà di traslazione, si ha

• $(s^3 - 2s + 1)\,\mathcal{L}[y](s) - \cancel{(s^2-2)\underbrace{y(0)}_{=0}} - s\underbrace{y'(0)}_{=1} - \underbrace{y''(0)}_{=-1} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s+1}$ dalle cond. iniziali;

devo risolvere perciò

$\Rightarrow (s^3 - 2s + 1)\,\mathcal{L}[y](s) - s + 1 = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s+1}$

Quindi

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{\cancel{-s^2} - s + s^3 + \cancel{s^2} + 1 - s}{s(s+1)} \, \frac{1}{(s^3-2s+1)} =$$

$$= \frac{\cancel{s^3-2s+1}}{s(s+1)\cancel{(s^3-2s+1)}} = \frac{1}{s(s+1)}$$

Siccome $\dfrac{1}{s(s+1)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1}$ (decomponendo in fratti semplici), avrò

$\mathcal{L}[y](s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1}$, da cui $\boxed{y(t) = 1 - e^{-t}}$ (riapplicando traslazione).
(antitrasformando)

c- Controlliamo che $y(t)$ così trovata sia soluzione del p. Cauchy:

$y'(t) = e^{-t}$, $y''(t) = -e^{-t}$, $y'''(t) = e^{-t}$

Perciò $y''' - 2y' + y = \cancel{e^{-t}} - 2e^{-t} + 1 - \cancel{e^{-t}} = 1 - 2e^{-t}$ ✓

Inoltre $y(0) = 1 - 1 = 0$

$y'(0) = 1$ <u>Ok</u>

$y''(0) = -1$

3) a- Determinare $w>0$ affinché la lunghezza di

$$\gamma : \begin{cases} y = \sqrt{x^3} \\ x \in [1/4, w] \end{cases}$$ sia pari a $97/8$.

Scriviamo γ in forma parametrica:

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t^3} \end{cases}, \quad t \in [1/4, w]$$ da cui $$\gamma' = \begin{cases} x' = 1 \\ y' = \frac{3}{2}\sqrt{t} \end{cases}$$

Si ha perciò

$$\ell(\gamma) = \int_{1/4}^{w} \sqrt{1+\frac{9}{4}t} = \frac{1}{2}\int_{1/4}^{w} \sqrt{4+9t}\, dt =$$

Pongo $\sqrt{4+9t} = s$

$4+9t = s^2$

$dt = \frac{2}{9} s\, ds$

$t = 1/4 \mapsto s = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

$t = w \mapsto s = \sqrt{4+9w}$

$$= \frac{1}{2}\int_{5/2}^{\sqrt{4+9w}} s \cdot \frac{2}{9} s\, ds = \frac{1}{9}\int_{5/2}^{\sqrt{4+9w}} s^2 ds = \frac{1}{9} \frac{s^3}{3}\Bigg|_{5/2}^{\sqrt{4+9w}} =$$

$$= \frac{1}{9} \frac{(4+9w)\sqrt{4+9w}}{3} - \frac{1}{9}\frac{125}{24} \overset{\text{DEVE}}{=} \frac{97}{8}$$

$\Rightarrow$ ottengo $8 \cdot (4+9w)^{3/2} - 125 = 2619 \Rightarrow (4+9w)^{3/2} = \frac{2744}{8} = 343 \Rightarrow$

$(4+9w)^3 = (343)^2 = 7^6 \Rightarrow 4+9w = 7^2 = 49 \Rightarrow w = 45/9 = 5.$

b - Calcolare il lavoro di $f(x,y) = \left(\frac{1}{x+y^2}, \frac{-x}{y^2(x+y^2)}\right)$ lungo γ.

- Notiamo che il campo f è definito per
  - $y \neq 0$ ok perché $y = \sqrt{x^3}$ e $x \in [1/4, 5]$
  - $x + y^2 \neq 0$ ok perché $y = \sqrt{x^3} \Rightarrow$

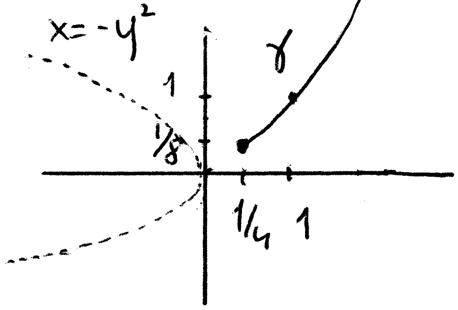
$\Rightarrow$ devo risolvere

$$x+x^3 \neq 0 \quad \text{cioè} \quad x \neq 0 \quad \text{ma} \quad x \in [1/4, 5] \quad \underline{\text{ok}}$$

$\Rightarrow$ il campo è sempre ben definito lungo γ e γ è una curva regolare $\Rightarrow$ posso calcolare il lavoro di F lungo γ.

- Notiamo che $\underline{F}$ è irrotazionale:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-2y}{(x+y^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{-2\cancel{y}(x+y^2)+2\cancel{y}\,x}{y^{\cancel{2}}(x+y^2)^2} = \frac{\cancel{-2x}-2y^2+\cancel{2x}}{y(x+y^2)^2} = \frac{-2y}{(x+y^2)^2}$$



γ si trova tutta nella regione $x+y^2>0$, ovvero $x>-y^2$, che è semplicemente connessa

$\Rightarrow$ $\underline{F}$ è conservativo e possiamo cercare un potenziale

$$U_1 = \int F_1\,dx + g(y)$$

ma

$$\int F_1\,dx = \int \frac{1}{x+y^2}\,dx + g(y) = \ln(\underbrace{x+y^2}) + g(y)$$

non scrivo il $|\cdot|$ poiché siamo nella regione $x+y^2>0$

si ha

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2} + g'(y) \overset{\text{DEVE}}{=} \frac{-2x}{y(x+y^2)}$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2 + g'(y)(y(x+y^2)) = -2x \Rightarrow g'(y) = \frac{-2x-2y^2}{y(x+y^2)} =$$

$$= \frac{-2\cancel{(x+y^2)}}{y\cancel{(x+y^2)}} = -\frac{2}{y} \Rightarrow g(y) = -2\ln y \quad \text{(senza } |\cdot| \text{ poiché su } \gamma\ y>0)$$

Perciò, $U(x,y) = \log(x+y^2) - 2\log y$

Poiché il punto iniziale di γ è $P_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ e il punto finale di γ è $P_2(5, 5\sqrt{5})$, si ha che

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{\varphi} = U(5,\sqrt{5}) - U\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}\right) =$$

$$= \log(5+125) - 2\log(5\sqrt{5}) - \log\left(\frac{17}{64}\right) + 2\log\left(\frac{1}{8}\right) =$$

prop. logaritmi $= \log 130 - \log 125 - \log\frac{17}{64} + \log\frac{1}{64} =$

idem $= \log\frac{\cancel{130}^{\,26}}{\cancel{125}_{\,25}} - \log 17 = \log\frac{26}{17\cdot 25} = \log\frac{26}{425}.$

4) $a - \Gamma: \varphi(t) = (\operatorname{sen} t^2, \tan t^2)$, $t \in [0, \pi/4]$.

① semplice, regolare, chiusa, ... (si noti che φ è sempre ben definita poiché $t^2 \le \frac{\pi^2}{16} < \frac{\pi}{2}$, ove tan ha un asintoto)

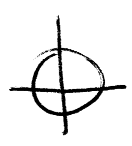
- Semplice: Devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen} t_1^2 = \operatorname{sen} t_2^2 \\ \tan t_1^2 = \tan t_2^2 \end{cases}$$ in t_1, t_2 incognite $\in [0, \pi/4]$

$\Rightarrow$ È equivalente a $\begin{cases} \operatorname{sen} t_1^2 = \operatorname{sen} t_2^2 \\ \cos t_1^2 = \cos t_2^2 \end{cases}$ $\left(\tan t_1^2 = \tan t_2^2 \Rightarrow \frac{\cancel{\operatorname{sen} t_1^2}}{\cos t_1^2} = \frac{\cancel{\operatorname{sen} t_2^2}}{\cos t_2^2}\right)$ dalla I eq.

Perciò, detti $\alpha = t_1^2$, $\beta = t_2^2$, abbiamo $\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \\ \cos\alpha = \cos\beta \end{cases}$ e

$\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi^2}{16} < 2\pi\right]$



$\Rightarrow \alpha = \beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (hanno stessi sen e cos)

$\Rightarrow$ non può essere $\alpha = \beta + 2k\pi$ con $k \neq 0$ $\Rightarrow \boxed{\alpha = \beta}$

$\Rightarrow t_1^2 = t_2^2$ e poiché sono entrambi positivi $\Rightarrow t_1 = t_2$ $\Rightarrow$ la curva Γ è semplice.

- Regolare

$$\varphi'(t) = \left(2t\cos t^2, \frac{2t}{\cos^2 t^2}\right)$$

φ' è ben definito su $[0, \pi/4]$ (la curva è C^1 su tale intervallo)

Si ha

$\varphi'(t) = (0,0)$ solo se $t=0$ (poiché $\cos t^2$ non si annulla mai in $[0, \pi/4]$)

Tuttavia, $t=0$ e' un estremo dell' intervallo di definizione
$\Rightarrow$ la curva è regolare secondo la def. vista.

- Chiusa

$\varphi_1(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \neq \varphi_1(\pi/4) = \operatorname{sen}\frac{\pi^2}{16} (\neq 0)$ $\Rightarrow$ Γ non è chiusa.

- La curva Γ non è parametrizzata mediante ascissa curvilinea poiché

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{4t^2\cos^2 t^2 + \frac{4t^2}{\cos^2 t^2}} \underset{(t>0)}{=} 2t\sqrt{\cos^2 t^2 + \frac{1}{\cos^2 t^2}}$$

e tale espressione non è identicamente 1 nell' intervallo di parametrizzazione (sappiamo che, se parametrizziamo una curva con ascissa curvilinea, $\|T(t)\| = 1 \ \forall t$).
Per es., per $t = \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$, si ha

$$\|\varphi'(\tfrac{1}{2})\| = \sqrt{\underbrace{\cos^2\frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{4}}}_{\geq 1 \ (\cos 1/4 < 1)}} > 1.$$

b - Calcolare il flusso di $\underline{G}(x,y,z) = (y, -x, z)$ attraverso la superficie di rotazione generata dalla rotazione di 2π di Γ' attorno a z. (Γ': stessa def. di Γ per $t \in [1/4, \pi/4]$).

Ricordiamo che la parametrizzazione della superficie assegnata è data da

$$\underline{r}(t,\theta) = \begin{cases} x(t,\theta) = \operatorname{sen} t^2 \cos\theta \\ y(t,\theta) = \operatorname{sen} t^2 \operatorname{sen}\theta \\ z(t,\theta) = \tan t^2 \end{cases} \qquad t \in [1/4, \pi/4],\ \theta \in [0, 2\pi]$$

(la curva γ è data nel piano Oxz)

Poiché il flusso è dato da

$$\Phi = \iint_D F(\underline{r}(t,\theta)) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial t} \times \frac{\partial r}{\partial \theta}\right) dt\, d\theta \ ,$$

dobbiamo calcolare il versore normale alla superficie.

con $D = [\frac{1}{4}, \frac{\pi}{4}] \times [0, 2\pi]$

(Si noti che non è prescritta un'orientazione $\rightarrow$ a scelta).

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \left(2t \cos t^2 \cos\theta,\ 2t \cos t^2 \operatorname{sen}\theta,\ \frac{1}{\cos^2 t^2} \cdot 2t\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \left(-\operatorname{sen} t^2 \operatorname{sen}\theta,\ \operatorname{sen} t^2 \cos\theta,\ 0\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} = \left(-\frac{2t \operatorname{sen} t^2 \cos\theta}{\cos^2 t^2},\ \frac{-2t \operatorname{sen} t^2 \operatorname{sen}\theta}{\cos^2 t^2},\ 2t \cos t^2 \operatorname{sen} t^2\right)$$

Si ha quindi

$$\Phi = \iint_D \left(\operatorname{sen} t^2 \operatorname{sen}\theta,\ -\operatorname{sen} t^2 \cos\theta,\ \tan t^2\right) \cdot \left(-\frac{2t \operatorname{sen} t^2 \cos\theta}{\cos^2 t^2},\ -\frac{2t \operatorname{sen} t^2 \operatorname{sen}\theta}{\cos^2 t^2},\ 2t \cos t^2 \operatorname{sen} t^2\right) dt\, d\theta =$$

$$= \int_{1/4}^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{2t\,\mathrm{sen}^2 t^2 \cancel{\mathrm{sen}\theta\cos\theta}}{\cancel{\cos^2 t^2}} + \frac{2t\,\mathrm{sen}^2 t^2 \cancel{\mathrm{sen}\theta\cos\theta}}{\cancel{\cos^2 t^2}} + 2t\,\frac{\mathrm{sen}\,t^2}{\cancel{\cos t^2}}\cancel{\cos t^2}\,\mathrm{sen}\,t^2\right)d\theta\, dt$$

$$= \int_{1/4}^{\pi/4}\int_0^{2\pi} 2t\,\mathrm{sen}^2 t^2\, d\theta\, dt \qquad 1-2\,\mathrm{sen}^2 s = \cos 2s$$

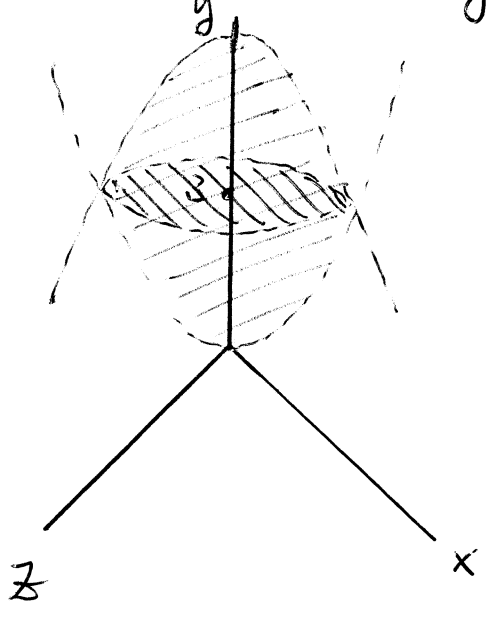
$$= 2\pi\int_{1/4}^{\pi/4} \cancel{2}t\,\frac{(1-\cos 2t^2)}{\cancel{2}}\,dt = 2\pi\left[\frac{t^2}{2}\Big|_{1/4}^{\pi/4} - \int_{1/4}^{\pi/4}\frac{1}{4}\cdot 4t\cos 2t^2\,dt\right] =$$

$$= 2\pi\left[\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{32}-\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2t^2\Big|_{1/4}^{\pi/4}\right] = 2\pi\left[\frac{\pi^2-1}{32}-\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\frac{1}{8}\right]$$

5) Calcolare $\displaystyle I = \iiint_A \frac{1}{y+1}\,dx\,dy\,dz$

ove $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2+z^2 \le y \le 9-2(x^2+z^2)\}$.

Il dominio è individuato dall'intersezione di due paraboloidi con asse di simmetria y



L'intersezione tra i due paraboloidi è data da

$$\begin{cases} x^2+z^2 = y \\ y = 9-2(x^2+z^2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x^2+z^2) = 9 \\ y = x^2+z^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+z^2 = 3 \\ y = 3\end{cases}$$

La proiezione di A sul piano xz è il cerchio $\mathcal{C}$: $x^2+z^2 \le 3$ $\Rightarrow$

Integriamo quindi per fili // y

$$I = \iiint_A \frac{1}{y+1}\, dx\,dy\,dz = \iint_{C} dx\,dz \left(\int_{x^2+z^2}^{9-2(x^2+z^2)} \frac{1}{y+1}\, dy \right) =$$

$$= \iint_{C} \log(y+1) \Big|_{x^2+z^2}^{9-2(x^2+z^2)} dx\,dz = \iint_{C} \log\left(10-2(x^2+z^2)\right) dx\,dz \; -$$

$\downarrow$

$y+1>0$ poiché $y>0$

coord. polari

$$\iint_{C} \log(1+x^2+z^2)\, dx\,dz = \begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ z=\rho\sin\theta \end{cases} \qquad C: \begin{array}{l} \rho\in[0,\sqrt{3}] \\ \theta\in[0,2\pi] \end{array}$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} -4\rho \log(10-2\rho^2)\, d\rho\, d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} 2\rho \log(1+\rho^2)\, d\rho\, d\theta$$

$\uparrow$ jacob.

$$= 2\pi\left[\frac{1}{4}\left[(10-2\rho^2)\log(10-2\rho^2) - (10-2\rho^2)\right]\Big|_0^{\sqrt{3}}\right] -$$

primitiva di $\log s$: $\boxed{s\log s - s}$

$$2\pi\left[\frac{1}{2}\left[(1+\rho^2)\log(1+\rho^2) - (1+\rho^2)\right]\Big|_0^{\sqrt{3}}\right]$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{4}(4\log 4 - 4) + \frac{1}{4}(10\log 10 - 10)\right]$$

$$-2\pi\left[\frac{1}{2}(4\log 4 - 4) - \frac{1}{2}\cdot(0-1)\right] =$$

$$= -\frac{\pi}{2}(4\log 4 - 4) + \frac{\pi}{2}(10\log 10 - 10) - \pi(4\log 4 - 4) - \pi =$$

$$= 5\pi(\log 10 - 1) - 6\pi(\log 4 - 1) - \pi = 5\pi\log 10 - 6\pi\log 4.$$