1) È data la funzione
$$f(x,y) = |x||y|^3 \mathrm{e}^{xy} + 1.$$

a- Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di $f(x,y)$ in **tutto** $\mathbb{R}^2$.

b- Qual è il valore minimo assunto da $f(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$? Esibire almeno un punto in cui è raggiunto.

c- Scrivere la formula di Taylor al secondo ordine per $f(x,y)$ nel punto $P(1,1)$.

2) È dato il campo vettoriale $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da
$$\mathbf{G}(x,y) = (2xy^3 + y + (f(x))^2 y,\ 3x^2y^2 + y^3 + f(x)),$$
dove $f(x)$ è una funzione incognita.

a- Determinare l'equazione differenziale (ovvero trovare un'equazione differenziale nell'incognita $f(x)$) che deve essere soddisfatta da $f(x)$ affinché $\mathbf{G}$ sia conservativo.

b- Risolvere il problema di Cauchy associato con condizione iniziale $f(0) = 1$.

3) a- Dire se la curva φ, avente nel piano Oxy equazione polare
$$\rho = 2 + \sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$
è regolare, semplice e chiusa. Determinare le intersezioni di φ con gli assi x e y.

b- Calcolare l'area racchiusa da φ.

4) a- Si calcoli (o si scriva, motivandone il valore) l'area A della porzione di superficie sferica
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z \geq 0, y \geq 0\}.$$

b- Si calcolino gli integrali
$$\frac{1}{A}\iint_S x\,dS, \quad \frac{1}{A}\iint_S y\,dS, \quad \frac{1}{A}\iint_S z\,dS.$$

c- Completare:
Gli integrali al punto b- rappresentano le coordinate del .... della porzione S di superficie sferica avente .... superficiale di massa omogenea pari a ....

5) Calcolare l'integrale triplo
$$\iiint_E (x+3)\,dxdydz,$$
ove
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \geq 1,\ x \geq 0,\ x \leq 2 + y^2 + z^2\}.$$