1) $f(x,y) = 2|xy| + (x-y)^2$

- Continuità, derivabilità e differenziabilità.

- La funzione è continua poiché somma di funzioni continue.
($|xy|, (x-y)^2$ continue per composizione)
- Derivabilità

La funzione è C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus Q$, ove
Q = asse x $\cup$ asse y $= \{(x,0), x\in\mathbb{R}\} \cup \{(0,y), y\in\mathbb{R}\}$,
quindi è ivi sicuramente derivabile.

Esaminiamo ora la derivabilità in punti degli assi.

① Asse x $P(x_0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,0) - f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0. \ (\forall x_0)$$

(D'altra parte, f è costantemente 0 sull'asse x, quindi muovendosi in direzione concorde all'asse non c'è variazione di f)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,h) - f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2|h||x_0| + (x_0-h)^2 - x_0^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 2|x_0|\frac{|h|}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{h^2-2hx_0}{h}$$

limiti finiti, spezzo

2 CASI: se $x_0 \neq 0$, il primo limite non esiste $\left(\sim \frac{|h|}{h}\right)$

se $x_0 = 0$, il limite esiste ed è pari a 0

(il secondo addendo si riconduce a $\lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h}$)

② Asse y $P(0, y_0)$

Con ragionamenti analoghi, si prova che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) = 0 \quad , \quad (\forall y_0)$$

mentre $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0)$ esiste solo se $y_0 = 0$.

□ Segue che f è derivabile in tutto

$$\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{Q} \quad ,$$

ove $\tilde{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy = 0 \text{ e } x^2+y^2 > 0\}$

↓

ovvero l'unione degli assi x e y, esclusa l'origine

- Differenziabilità

Poiché f è C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus Q$, è ivi differenziabile.

Poiché f non è derivabile in $\tilde{Q}$, sicuramente non è differenziabile in $\tilde{Q}$.

Poiché $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2 \setminus Q) \cup \tilde{Q} \cup \{(0,0)\}$, resta da esaminare il comportamento in $(0,0)$.

Il "candidato differenziale" in $(0,0)$ è la funzione nulla (poiché sono nulle le derivate parziali).

Devo perciò calcolare

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2|hk| + (h-k)^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

È sufficiente studiare

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad (*)$$

. Proviamo che $(*) \to 0$.

(l'altro limite è nullo poiché l'addendo è C^1).

Visto che

$$2hk \leq h^2+k^2 \quad e \quad -2hk \leq h^2+k^2$$

(ciò segue dal fatto che $(h+k)^2 \geq 0$, $(h-k)^2 \geq 0$)), fissato ε, se $\sqrt{h^2+k^2} \leq \varepsilon$ (come nella definizione di limite) si ha

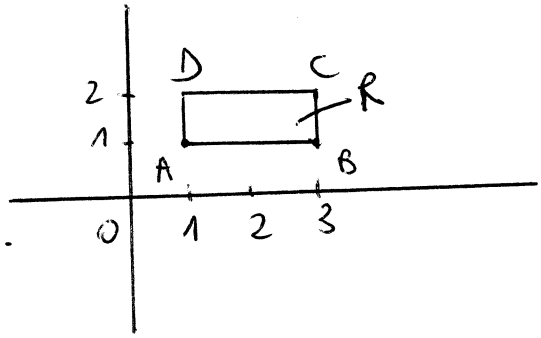
$$\left| \frac{2|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \leq \sqrt{h^2+k^2} \leq \varepsilon,$$

perciò è verificata la definizione di limite=0 per $(*)$, da cui segue che f è differenziabile in $(0,0)$.

<u>OSS</u> Si può studiare fin dall'inizio il solo addendo $|xy|$ (l'altro addendo non altera il ragionamento relativo alla regolarità)

- Max e min su

$R = [1,3] \times [1,2]$.



Su R, si ha $f(x,y) = 2xy + (x-y)^2 = x^2+y^2$.

Perciò $f|_R = \|\cdot\|^2$.

Segue che massimo e minimo di f su R saranno raggiunti, rispettivamente, nei punti di R che distano di più e di meno da O. È chiaro che A è minimo assoluto (ha entrambe le

componenti minime) e C è massimo assoluto.
Si ha $f|_A = 2$, $f|_C = 13$.

- $\displaystyle\min_{\mathbb{R}^2} f$?

Poichè f è somma di termini nonnegativi, $f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
Inoltre

$$f(x,y) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad |xy| = 0 \ \underline{e} \ (x-y) = 0$$

$\Leftrightarrow \ x = y$ e $|xy| = 0$ cioè uno tra x e y si annulla

$\Leftrightarrow \ x = y = 0$

Quindi $f(0,0) = 0$ è il valore minimo di f su tutto $\mathbb{R}^2$:
$(0,0)$ minimo assoluto.

- $\displaystyle\max_{\mathbb{R}^2} f$?

La funzione non ha massimo assoluto su $\mathbb{R}^2$ poichè
è illimitata: basta per esempio considerare la retta $x = y$
per ottenere

$$f(x,x) = 2x^2 \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty .$$

2) $y'' - 5y' + 6y = 18x + e^{3x}$

- OMOGENEA $\quad y'' - 5y' + 6y = 0$

Eq. car. $\quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \Big\langle \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$

Integrale generale dell'omogenea: $\quad c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

- Eq. completa

Uso sovrapposizione e somiglianza

① $y''-5y'+6y=18x$

$$e^{px}\left(h(x)\cos qx+k(x)\sin qx\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p=0 \\ q=1 \end{array}\right\}$$ $p\pm iq=\pm i$ non soluz. dell'eq. ca

$h(x)=18x$

$k(x)=0$

$\Rightarrow$ Sfruttando il metodo, sono ricondotto a cercare una soluzione $\bar{y}(x)=Ax+B$

$\bar{y}'(x)=A$

$\bar{y}''(x)=0$

$\Rightarrow$ Imponendo che $\bar{y}$ soddisfi l'equazione si ha

$$-5A+6Ax+6B=18x \Rightarrow \begin{array}{l} A=3 \\ B=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}. \end{array}$$

[FILA B: $A=6$, $B=5$]

Perciò $\bar{y}(x)=3x+\frac{5}{2}$ è una soluzione particolare.

② $y''-5y'+6y=e^{3x}$

↳ in questo caso, posso scegliere $\left.\begin{array}{l} p=3 \\ q=0 \\ h=k=0 \end{array}\right\}$ $p\pm iq=3$ soluzione dell'eq. car. con molteplicità $m=1$

$\Rightarrow$ sono ricondotto a cercare una soluzione

$\bar{\bar{y}}(x)=Axe^{3x}$

$\bar{\bar{y}}'(x)=Ae^{3x}+A3xe^{3x}$

$\bar{\bar{y}}''(x)=3Ae^{3x}+3Ae^{3x}+9Axe^{3x}=6Ae^{3x}+9Axe^{3x}$

$\Rightarrow$ Imponendo che $\bar{\bar{y}}$ soddisfi l'equazione si ha

$$6Ae^{3x} + \cancel{9Ax}e^{3x} - 5Ae^{3x} - \cancel{15Ax}e^{3x} + \cancel{6Ax}e^{3x} = e^{3x}$$

$\Rightarrow A = 1$ e $\bar{\bar{y}}(x) = xe^{3x}$.

[FILA B: A=2]

• INTEGRALE GENERALE DELL'EQ. ASSEGNATA:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + 3x + \frac{5}{2} + xe^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Limiti.

- Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + 3x + \frac{5}{2} + xe^{3x}}{x} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sono tutti} \\ \text{limiti finiti}}}{=} \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ per } x\to-\infty \\ \text{(esponenziale e numeratore)}}} + \lim_{x\to-\infty} 3 + \underbrace{\frac{5/2}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{e^{3x}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{(esponenziale e } -\infty)}} = 3.$$

[FILA B: 6]

- Si ha

$$\frac{y(x)}{x^\alpha} = \frac{C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + 3x + \frac{5}{2} + xe^{3x}}{x^\alpha} =$$

$$= \frac{(C_1 + x)e^{3x} + C_2 e^{2x} + 3x + 5/2}{x^\alpha}$$

Il termine di ordine massimo è $(C_1+x)e^{3x}$, che ha segno positivo poiché $x\to+\infty$. Siccome $\frac{(C_1+x)e^{3x}}{x^\alpha} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$ per ogni α ("vince l'esponenziale" perché ha ordine di infinito più forte), non esiste alcun $\alpha \geq 0$ tale che $\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x^\alpha} = 0$.

3)

$\gamma:\quad \rho(\theta)=\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right), \qquad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$

- La curva passa, per $\theta=0$, per il punto avente $\rho=0$, cioè per l'origine;

Il punto $P\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ sta sull'asse y, quindi $\theta_P=\pi/2$ e $\rho_P=\frac{\pi}{2}$ ma $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ quindi $P\notin\gamma$

Analogamente, $Q\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ sta sull'asse x, quindi $\theta_Q=0$ e $\rho_Q=\frac{\pi}{2}$ ma $\rho(0)=0$ quindi $Q\notin\gamma$

Infine $R(1,1)$ sta sulla retta $y=x$, quindi $\theta_R=\frac{\pi}{4}$ e $\rho_R=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ ma $\rho\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{16}\neq\sqrt{2}$, quindi $R\notin\gamma$.

- Scriviamo γ come

$$\begin{cases} x(\theta)=\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\theta \\ y(\theta)=\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\operatorname{sen}\theta \end{cases}, \quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Si ha

$$\gamma':\begin{cases} x'(\theta)=\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\theta-\theta\cos\theta-\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\operatorname{sen}\theta \\ y'(\theta)=\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\operatorname{sen}\theta-\theta\operatorname{sen}\theta+\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\theta \end{cases}$$

$$\gamma':\begin{cases} x'(\theta)=\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\cos\theta-\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\operatorname{sen}\theta \\ y'(\theta)=\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\operatorname{sen}\theta+\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\theta \end{cases}$$

Svolgendo i conti, si ha

$$\|\gamma'(\theta)\|^2=\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)^2+\theta^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2$$

→ addendi entrambi positivi o al più nulli

Il secondo addendo è nullo per $\vartheta=0$ o $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, ma in corrispondenza di tali valori il primo addendo non si annulla. Segue che $\|\gamma'(\vartheta)\|\neq 0 \quad \forall\vartheta$ e la curva è regolare, essendo le sue componenti C^1.

La curva è semplice poiché ρ è dato come funzione di ϑ e ϑ non assume mai lo stesso valore più di una volta; l'unico pericolo è in corrispondenza di $\rho=0$, ma $\rho=0 \Leftrightarrow \vartheta=0$ o $\vartheta=\pi/2$ estremi dell'intervallo. Volendo verificare direttamente la semplicità comunque, si procede così: siano ϑ_1, ϑ_2 tali che $x(\vartheta_1)=x(\vartheta_2)$, $y(\vartheta_1)=y(\vartheta_2)$; cioè

$$\begin{cases} \vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_1\right)\cos\vartheta_1 = \vartheta_2\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_2\right)\cos\vartheta_2 \\ \vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_1\right)\operatorname{sen}\vartheta_1 = \vartheta_2\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_2\right)\operatorname{sen}\vartheta_2 \end{cases}, \quad \vartheta_1,\vartheta_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Supponendo $\vartheta_1\neq 0,\frac{\pi}{2}$ e $\vartheta_2\neq 0,\frac{\pi}{2}$, cosicché i membri della prima equazione non siano nulli, possiamo "dividere la seconda equazione per la prima", ottenendo

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta_1}{\cos\vartheta_1}=\frac{\operatorname{sen}\vartheta_2}{\cos\vartheta_2} \Rightarrow \operatorname{tg}\vartheta_1=\operatorname{tg}\vartheta_2$$

e siccome la tangente è iniettiva su $\left]0,\pi/2\right[$, ciò implica $\vartheta_1=\vartheta_2$.

Se invece uno tra ϑ_1 e ϑ_2 è un estremo dell'intervallo di parametrizzazione, si ha

$\underset{\sim}{\vartheta_1=0} \longrightarrow \begin{cases} \vartheta_2\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_2\right)\cos\vartheta_2=0 \\ \vartheta_2\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_2\right)\operatorname{sen}\vartheta_2=0 \end{cases} \longrightarrow$ o $\vartheta_2=0$ $\underline{\text{ok}}$; o $\vartheta_2=\frac{\pi}{2}$ $\underline{\text{ok}}$; o $\cos\vartheta_2=0$ cioè $\vartheta_2=\frac{\pi}{2}$ $\left(\vartheta_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ $\underline{\text{ok}}$

$\downarrow$

o $\vartheta_2=0$ ok

o $\vartheta_2=\frac{\pi}{2}$ ok

o $\vartheta_2=0$ $\left(\operatorname{sen}\vartheta_2=0 \text{ e } \vartheta_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$

Analogamente, se $\underset{\sim}{\vartheta_1=\frac{\pi}{2}}$, si ha la stessa situazione.

$\underset{\sim}{\vartheta_2=0}$ o $\underset{\sim}{\vartheta_2=\frac{\pi}{2}}$

Perciò la curva non ripassa mai per lo stesso punto in istanti θ interni all'intervallo di parametrizzazione: γ è semplice. 15

- Calcolare il lavoro di

$$\underline{F}(x,y) = \left(2(x+y)+e^x,\ 2(x+y)+e^y\right)$$

lungo γ.

Osserviamo che:

- γ è chiusa, poiché

$$x(0) = 0 = x\left(\tfrac{\pi}{2}\right), \quad y(0) = 0 = y\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$$

- Il campo è conservativo, essendo

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

(il dominio di $\underline{F}$ è $\mathbb{R}^2$, semplicemente connesso)

Infatti $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 2$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 2$

Segue che

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{\varphi} = 0.$$

4) $$I = \iint_S \frac{2z+2y^2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}\, dS,$$

S porzione del grafico di $z = x^2-y^2$ per

$$(x,y) \in D = \{x^2+4y^2 \leq 4\}.$$

Parametrizziamo perciò la superficie (che è parte del grafico di una funzione cartesiana) nel seguente modo:

$$\varphi: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 - v^2 \end{cases} , \quad \text{per } (u,v) \in D .$$

Segue, per $(u,v) \in D$,

$$\varphi_u(u,v) = (1, 0, 2u)$$

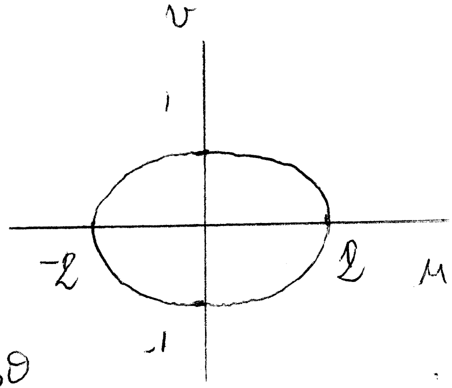
$$\varphi_v(u,v) = (0, 1, -2v)$$

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-2u, 2v, 1) \quad \text{e} \quad \|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}$$

Si ha perciò

$$I = \iint_D \frac{2u^2 - 2v^2 + 2v^2}{\cancel{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}} \cdot \cancel{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \, du\,dv =$$

$$= \iint_D 2u^2 \, du\,dv = J$$



Passando a coordinate ellittiche, $\begin{cases} u = 2\rho\cos\theta \\ v = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$, $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, con jacobiano 2ρ, otteniamo

$$J = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 8\rho^2 \cos^2\theta \cdot 2\rho \, d\theta\, d\rho = \int_0^1 16\rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta =$$

$$16 \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{2}\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi .$$

(ok ragionamenti di simmetria)

5) Calcolare

$$I = \iiint_E xz \, dx\,dy\,dz \, ,$$

ove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x \geq 0, \ 4x^2+y^2 \leq 4, \ 1 \leq z \leq \sqrt{2y}\}$.

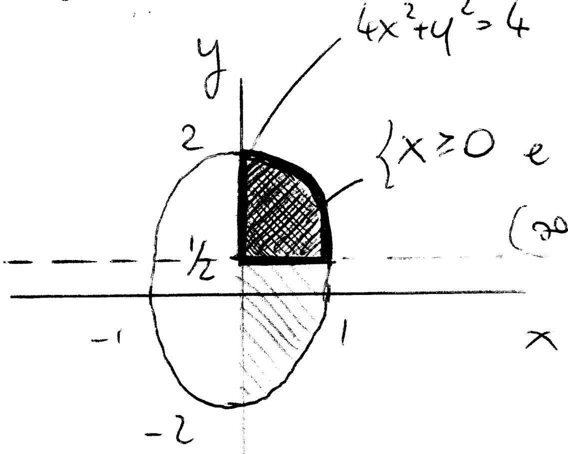
INTEGRIAMO PER FILI // z: pensiamo cioè x e y fissate. Dove sono fissate?

- Dalla terza disuguaglianza si ha che

$$\sqrt{2y} \geq 1 \, , \quad \text{cioè} \begin{cases} 2y \geq 0 & \Rightarrow \ y \geq 0 \\ 2y \geq 1 & \Rightarrow \ y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y \geq \frac{1}{2}} .$$

Vogliamo scrivere I come integrale per fili // z, cioè

$I = \iint_D \left(\int_1^{\sqrt{2y}} xz \, dz \right) dx\,dy$, determinando D. Dalle disuguaglianze che definiscono E abbiamo ora la seguente situazione:



(ragiono su z a x e y fissate)

$\{x \geq 0 \text{ e } y \geq \frac{1}{2}, \ 4x^2+y^2 \leq 4\}$

(sarà il dominio D di partenza per l'integrazione per fili)

$$D = \left\{(x,y) : \frac{1}{2} \leq y \leq 2, \ 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right\} .$$

Si ha cioè

$$I = \iint_D \left(\int_1^{\sqrt{2y}} xz \, dz \right) dx\,dy = \iint_D x \left. \frac{z^2}{2} \right|_1^{\sqrt{2y}} dx\,dy =$$

$$= \iint_D x\left(y - \frac{1}{2}\right) dx\,dy = \int_{1/2}^{2} \int_0^{\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}} \left(xy - \frac{1}{2}x\right) dx\,dy =$$

$$\int_{1/2}^{2} \frac{x^2 y}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}} - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}} \, dy =$$

$$= \int_{1/2}^{2} \left(\frac{4-y^2}{8}\right) y - \frac{1}{2}\left(\frac{4-y^2}{8}\right) \, dy =$$

$$= \int_{1/2}^{2} \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^3 - \frac{1}{4} + \frac{y^2}{16} \, dy = \frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{32} - \frac{1}{4}y + \frac{y^3}{48}\Bigg|_{1/2}^{2} =$$

$$= \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16\cdot 32} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8\cdot 48} =$$

$$= \frac{2^8 - 3\cdot 2^5 + 3 + 2^6\cdot 3 - 2^2}{2^9\cdot 3} = \frac{256 - 96 + 3 + 192 - 4}{1536} =$$

$$= \frac{351}{1536} = \frac{117}{512}.$$