• Correzione 18/10/13 BIOMEDICA

1) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^n+y^n}}{x^2+y^2}$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

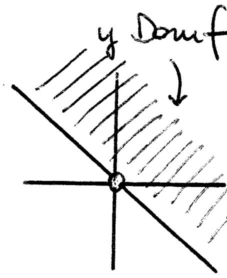
a- Dom f?

Osserviamo che $(0,0) \notin$ Dom f (il denominatore deve essere $\neq 0$).

Se n è PARI, allora la funzione è definita in ogni altro punto (infatti avremo un radicando non negativo a numeratore), se n è DISPARI, dovremo escludere tutte le coppie (x,y) che danno la negatività del radicando $\Rightarrow$ deve essere

$$x^n+y^n \geq 0 \Rightarrow x^n \geq -y^n \Rightarrow x \geq -y$$

poiché n è dispari, estraiamo la $\sqrt[n]{\ }$ senza ulteriori discussioni



Perciò

$$\text{Dom} f = \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} & n \text{ pari} \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \,/\, x \geq -y\} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

b- n/ f è prolungabile per continuità in $(0,0)$?

Si noti che $(0,0)$ è comunque un punto di accumulazione di Dom f ($\forall n \in \mathbb{N}$).

Passando a coordinate polari si ha

$$f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) = \frac{\sqrt{\rho^n(\cos^n\theta + \text{sen}^n\theta)}}{\rho^2} = \frac{\rho^{\frac{n}{2}}\sqrt{\cos^n\theta+\text{sen}^n\theta}}{\rho^2} = \rho^{\frac{n}{2}-2}\sqrt{\cos^n\theta+\text{sen}^n}$$

Affinché tale funzione tenda a 0 uniformemente in θ per $\rho \to 0^+$, deve essere $\frac{n}{2} - 2 > 0 \Rightarrow \boxed{n > 4}$. [FILA B: $n > 8$]

(altrimenti si ha $\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\frac{1}{\rho^\alpha}}$ con $\alpha > 0$, oppure, per $n=4$, $\sqrt{\cos^n\theta + \operatorname{sen}^n\theta}$ che dipende da θ!)

Scegliamo ora, per esempio, $n=2$ cosicché

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ per $(x,y) \in \operatorname{dom} f$, palesemente non continua in $(0,0)$

Infatti $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty \neq 0$!

Nel caso $n=4$ si ha

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x^2+y^2}$$

Sulla retta $y=x$ abbiamo $f(x,x) = \frac{\sqrt{2x^4}}{2x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Sulla retta $y=2x$ abbiamo $f(x,2x) = \frac{\sqrt{17x^4}}{5x^2} = \frac{\sqrt{17}}{5}$

$\neq$! (e diverso da 0)

$\Rightarrow$ f non è prolungabile per continuità in $(0,0)$.

d- Poniamo $n=4$. Differenziabilità in $(0,0)$?
Poiché f non è continua in $(0,0)$ per $n=4$, non è neppure ivi differenziabile.

c- Poniamo $n=2$. $f'((1,0); \underline{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}))$? Piano tangente al grafico di f in $(1,0)$?

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

per (x,y) in un intorno di $(1,0)$.

[FILA B: $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^4+y^4}}$]

Poiché f è differenziabile in $(1,0)$ (essendo C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$), calcoliamo $\nabla f(1,0)$ e usiamo la formula del gradiente. ②

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{0 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = -\frac{1}{1} = -1.$$

$$\left[\text{FILA B: } \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,0)} = \left.\frac{-\frac{2 \cdot x^3}{\sqrt{x^4+y^4}}}{x^4+y^4}\right|_{(1,0)} = -2\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{0 - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$$

$$\left[\text{FILA B: } \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,0)} = 0\right]$$

Perciò $f'((1,0); v=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})) = \langle \nabla f(1,0), (\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\rangle = \langle(-1,0)\cdot(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\rangle = -\frac{1}{2}.$

[FILA B: -1]

L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1,0)$ è data da

$$z = f((1,0)) + \langle \nabla f(1,0) \cdot (x-1, y-0)\rangle = 1 + \langle(-1,0)\cdot(x-1, y)\rangle =$$
$$= 1 - x + 1 = -x + 2.$$

Eq.: $z = -x+2$.

[FILA B: $z = 3-2x$]

2) a- Determinare $g(x)$ affinché $y(x) = 1 + \cos 4x$ sia soluzione dell'eq. diff.

$$y'' + 4y = g(x).$$

Si ha

$\bar{y}(x) = 1 + \cos 4x$

$\bar{y}'(x) = -4 \operatorname{sen} 4x$

$\bar{y}''(x) = -16 \cos 4x$

Affinché $\bar{y}$ sia soluzione, deve essere

$$-16 \cos 4x + 4 + 4 \cos 4x = g(x)$$

$\Rightarrow \quad g(x) = 4 - 12 \cos 4x.$ $\quad$ [FILA B: $g(x) = 4 - 12 \operatorname{sen} 4x$]

b- $\quad y'' + 4y = 4 - 12 \cos 4x + e^x \cos 2x + \cos 2x$

<u>OMOGENEA</u>

$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2i$

$\Rightarrow$ le soluzioni dell'omogenea sono date da

$$y_0(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

<u>COMPLETA</u>

Usiamo il metodo di sovrapposizione, essendo il primo pezzo già risolto precedentemente: consideriamo separatamente $\cos 2x$ e $e^x \cos 2x$.

Risolviamo $\quad y'' + 4y = e^x \cos 2x$

Somiglianza: $\quad e^{px}(h(x) \cos qx + R(x) \operatorname{sen} qx)$ $\qquad p = 1$, $q = 2$, $k = 0$, $h = 1$

· cerco soluzioni $\quad \hat{y}(x) = e^x(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x) \Leftarrow$ Poiché $1 \pm 2i$ non è sol. dell'eq. car. <u>$m = 0$</u>

$\hat{y}'(x) = e^x(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x) + e^x(-2A \operatorname{sen} 2x + 2B \cos 2x)$

$$\hat{y}''(x) = e^x(A\cos x + B\,\text{sen}\,2x) + e^x(-4A\,\text{sen}\,2x + 4B\cos 2x) + e^x(-4A\cos 2x - 4B\,\text{sen}\,2x)$$ ③

$$\hat{y}'' + 4\hat{y} = e^x \cos 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + 4B - \cancel{4A} + \cancel{4A} = 1 \\ B - 4A - \cancel{4B} + \cancel{4B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + 4B = 1 \\ B - 4A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/17 \\ B = 4/17 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{y}(x) = e^x\left(\frac{1}{17}\cos 2x + \frac{4}{17}\,\text{sen}\,2x\right).$$

Risolviamo ora

$$y'' + 4y = \cos 2x$$

Stavolta, nella ricerca di soluzioni particolari della forma

$y(x) = x^m e^{px}(h\cos qx + k\,\text{sen}\,qx)$, otteniamo $p=0$, $q=2$, $m=1$ (poiché $\pm 2i$ sono radici con molteplicità 1)

$\Rightarrow$ cerco

$$\hat{y}(x) = x(A\cos 2x + B\,\text{sen}\,2x)$$

$$\hat{y}'(x) = A\cos 2x + B\,\text{sen}\,2x + x(-2A\,\text{sen}\,2x + 2B\cos 2x)$$

$$\hat{y}''(x) = -2A\,\text{sen}\,2x + 2B\cos 2x - 2A\,\text{sen}\,2x + 2B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\,\text{sen}\,2x)$$

$$\hat{\hat{y}}'' + 4\hat{\hat{y}} = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4A = 0 \\ 4B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1/4 \end{cases} \Rightarrow \hat{\hat{y}}(x) = \frac{1}{4}x\,\text{sen}\,2x.$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + 1 + \cos 4x + e^x\left(\tfrac{1}{17}\cos 2x + \tfrac{4}{17}\operatorname{sen} 2x\right)$$
$$+ \tfrac{1}{4}\, x \operatorname{sen} 2x$$

c- $\exists$ soluzioni tali che $y(0)=0=y(\pi)$?

Affinché sia $y(0)=0$, dobbiamo avere (dall'espressione di $y(x)$)

$$C_1 + 1 + 1 + \tfrac{1}{17} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{35}{17}$$

[FILA B: $C_1 + 1 + 1/17 = 0 \Rightarrow C_1 = -18/17$]

Si ha ($\operatorname{sen} 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$)

$$y(\pi) = C_1 + 1 + 1 + e^{\pi}\left(\tfrac{1}{17}\right) = C_1 + 2 + \frac{1}{17}e^{\pi} \underset{C_1 = -\frac{35}{17}}{=}$$
$$= \frac{1}{17}\left(-1 + e^{\pi}\right) \neq 0 \,!$$

[FILA B: idem]

Non esistono pertanto soluzioni siffatte.

3) $\gamma \to \varphi : [-\pi/4, \pi/4] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (\log(\cos^2 t), \tan t, t^4)$.
(ben definita)

a- Regolarità:

Osservo che $$\varphi'(t) = \left(\frac{-1}{\cos^2 t}\cdot 2\cos t \operatorname{sen} t,\ \frac{1}{\cos^2 t},\ 4t^3\right) =$$
$$= \left(-2\operatorname{tg} t,\ \frac{1}{\cos^2 t},\ 4t^3\right)$$

Poiché $\cos t \neq 0$ $\forall t \in [-\pi/4, \pi/4]$, ed essendo $\operatorname{tg} t$ ben definita in $[-\pi/4, \pi/4]$, le componenti sono C^1. Inoltre $4t^3 = 0 \Leftrightarrow t = 0$, ma per $t=0$

la seconda componente di φ' è $\frac{1}{\cos^2 0} = 1 \neq 0$, perciò (4)

$\varphi'(t) \neq \underline{0} \quad \forall t \in [-\pi/4, \pi/4]$.

Semplicità

Osservo che (III componente di φ)

- $t_1^4 = t_2^4$ per $t_1, t_2 \in [-\pi/4, \pi/4]$ implica

(1) $t_1 = t_2$ (estraendo le radici quarte) $\Rightarrow$ $\boxed{OK}$

oppure

(2) $t_1 = -t_2$

ma (II componente di φ) se $t_1 = -t_2$ si ha

$\tan(t_1) = -\tan(t_2) \Rightarrow$ unica possibilità: $\tan t_1 = 0$, $\tan t_2 = 0$ $\Rightarrow t_1 = 0, t_2 = 0$ poiché $t_1, t_2 \in [-\pi/4, \pi/4]$

$\rightarrow$ se $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ abbiamo necessariamente $t_1 = t_2 \overset{t_1, t_2 \in [-\pi/4, \pi/4]}{\Rightarrow}$ γ è semplice

Chiusura

si ha $\varphi(-\pi/4) = \left(\log\left(\frac{1}{2}\right), \frac{-1}{\#}, \left(-\pi/4\right)^4\right)$

$\varphi(\pi/4) = \left(\log\left(\frac{1}{2}\right), 1, \left(\pi/4\right)^4\right)$ $\Rightarrow$ γ non è chiusa.

Lunghezza

si ha $l = \mathcal{L}(\varphi) = \displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \underbrace{\sqrt{4\operatorname{tg}^2 t + \frac{1}{\cos^4 t} + 16t^6}}_{\text{poiché}} \, dt$

$\cos^4 t \leq 1$, $\frac{1}{\cos^4 t} \geq 1$, perciò

$$4tg^2t+\frac{1}{\cos^4 t}+16t^6 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{4tg^2t+\frac{1}{\cos^4 t}+16t^6} \geq 1 \Rightarrow$$

termini ≥ 0

$$\mathcal{L}(\varphi) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{4tg^2t+\frac{1}{\cos^4 t}+16t^6}\, dt \geq \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dt = \frac{\pi}{2}.$$

monotonia dell' integrale

b - Applicando la def. di lavoro si ha

$$L = \int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{\varphi} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \Big(\cos^2 t + \cos^2 t \tan t, (\cos^2 t)t^4 + \cos^2 t \tan t,$$

$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$

$$\sqrt{\cos^2 t}\tan t\Big)\cdot\left(-2\tan t, \frac{1}{\cos^2 t}, 4t^3\right) dt =$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[-2\cos^2 t\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} - 2\cos^2 t\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + t^4 + \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} + \cos t\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\cdot 4t^3\right]dt$$

(notare che $\cos t > 0$ nell'intervallo di def. di γ)

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\Big[\underset{\text{I}}{-2\operatorname{sen} t\cos t} \underset{\text{II}}{-2\operatorname{sen}^2 t} + \underset{\text{III}}{t^4} + \underset{\text{IV}}{\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}} + \underset{\text{V}}{4t^3\operatorname{sen} t}\Big]dt$$

$$\text{I} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} -\operatorname{sen} 2t\, dt = \left.\frac{\cos 2t}{2}\right|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 0.$$

$$\text{II} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} -2\operatorname{sen}^2 t\, dt = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos 2t - 1)\,dt = \left.\left(\frac{\operatorname{sen} 2t}{2} - t\right)\right|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2} = 1-\pi/2.$$

(III) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} t^4\,dt = \frac{t^5}{5}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi^5}{5\cdot 1024} + \frac{\pi^5}{5\cdot 1024} = \frac{\pi^5}{5\cdot 512} = \frac{\pi^5}{2560}.$ (S)

(IV) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\,dt = -\ln\cos t\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$(\cos t > 0)$

(In effetti, l'integrando è dispari).

(V) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4t^3 \operatorname{sen} t\,dt \overset{\text{PARTI}}{=} -\cos t\cdot 4t^3\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 12t^2\cos t\,dt =$

$\displaystyle = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi^3}{16} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi^3}{16} + 12\left[\operatorname{sen} t\cdot t^2\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2t\operatorname{sen} t\,dt\right] =$

$\displaystyle = -\sqrt{2}\frac{\pi^3}{16} + 12\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi^2}{16}\right] - 12\left[-\cos t\cdot 2t\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\cos t\,dt\right] =$

$\displaystyle = -\sqrt{2}\frac{\pi^3}{16} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\,\pi^2 - 12\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right] - 12\cdot 2\operatorname{sen} t\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} =$

$\displaystyle = -\frac{\sqrt{2}}{16}\pi^3 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi^2 + 6\sqrt{2}\,\pi - 12\cdot\sqrt{2} - 12\cdot\sqrt{2} =$

$\displaystyle = -\frac{\sqrt{2}}{16}\pi^3 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi^2 + 6\sqrt{2}\pi - 24\sqrt{2}.$

Quindi, $\displaystyle L = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^5}{2560} - \frac{\sqrt{2}}{16}\pi^3 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi^2 + 6\sqrt{2}\pi - 24\sqrt{2}.$

4) Calcolare il flusso di

$$\underline{F}(x,y,z) = (x^3y + yz,\ x^2z,\ xy^3)$$

uscente dalla sfera unitaria.

- Siccome la sfera unitaria è il bordo del dominio $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$, risulta conveniente utilizzare il teorema della divergenza (notare che la sfera è già orientata in modo da poter applicare il teorema, ovvero il normale considerato è quello uscente)

Si ha $\operatorname{div} \underline{F} = (3x^2y + 0 + 0) = 3x^2y$.

[FILA B: $6x^2y$]

Perciò

$$\iint_S \underline{F} \cdot \underline{\nu}\, dS = \iiint_E \operatorname{div} \underline{F}\, dx\,dy\,dz =$$

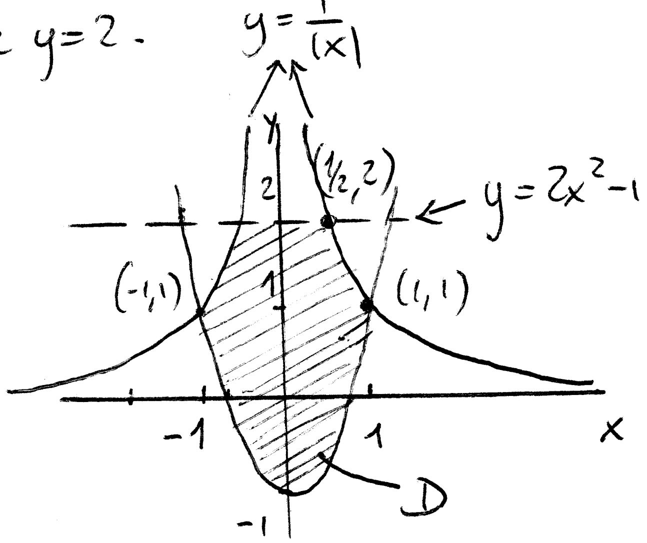
$$= \iint_{\{x^2+y^2+z^2 \leq 1\}} 3x^2y\, dx\,dy\,dz = 0!$$

Basta ora osservare che il dominio di integrazione è simmetrico in y, mentre la funzione integranda è dispari in y; ciò è sufficiente per affermare che il flusso dato è nullo.

5) Calcolare $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{(2+y)^2}\,dx\,dy$,

ove D è la regione di piano sotto la curva $y=\frac{1}{|x|}$, limitata da $y=2x^2-1$ e $y=2$.

Si ha



$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\le\frac{1}{|x|},\ y\ge 2x^2-1,\ y\le 2\right\}$$

(nota che $1+y^2\neq 0\ \forall y \to$ l'integrale è ben definito)

siccome D è simmetrico rispetto a x e l'integranda è pari in x, basta considerare l'integrale su $\tilde{D}=D\cap\{x>0\}$ e poi moltiplicare per 2

Possiamo scrivere $\tilde{D}=D_1\cup D_2$, con D_1, D_2 normali rispetto a y: per fare ciò, notiamo che l'intersezione $\begin{cases} y=\frac{1}{|x|} \\ y=2\end{cases}$ dà $x=\pm 1/2$.

$$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\le x\le\frac{1}{2},\ 2x^2-1\le y\le 2\right\}$$

$$D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 1/2\le x\le 1,\ 2x^2-1\le y\le \frac{1}{x}\right\}$$

Perciò $$\iint_{\tilde{D}} \frac{x^2}{(2+y)^2}\,dx\,dy = \int_0^{1/2}\int_{2x^2-1}^{2} \frac{x^2}{(2+y)^2}\,dy\,dx + \int_{1/2}^{1}\int_{2x^2-1}^{1/x} \frac{x^2}{(2+y)^2}\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^{1/2} x^2\left(-\frac{1}{(2+y)}\Bigg|_{2x^2-1}^{2}\right)dx + \int_{1/2}^{1} x^2\left(-\frac{1}{(2+y)}\Bigg|_{2x^2-1}^{1/x}\right)dx =$$

$$\int_0^{1/2} x^2\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2x^2+1}\right)dx + \int_{1/2}^{1} x^2\left(-\frac{1}{2+\frac{1}{x}}+\frac{1}{2x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int_0^{1/2}\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{x^2}{2x^2+1}\right)dx + \int_{1/2}^{1} \underbrace{x^2\left(-\frac{x}{2x+1}\right)} + \frac{x^2}{2x^2+1}\,dx =$$

$$= \int_0^{1} \frac{1}{2}\,\frac{2x^2\pm 1}{2x^2+1}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^{1/2} x^2 - \int_{1/2}^{1} x^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1/2}{2x+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1}\left(1-\frac{1}{2x^2+1}\right)dx - \frac{1}{4}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/2} + \frac{x^3}{2\cdot 3}\Big|_{1/2}^{1} - \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1}\frac{x^2}{2x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{1}\frac{1}{2x^2+1}\,dx - \frac{1}{96} + \frac{1}{6} - \frac{1}{48} +$$

$$-\frac{1}{2}\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)+\frac{1/4}{2x+1}\,dx =$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 2x+1 \\ \hline x^2+\frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \\ // -\frac{1}{2}x & \\ -\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} & \\ \hline \frac{1}{4} & \end{array} \Rightarrow x^2 = (2x+1)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}x)^2}\,dx - \frac{3}{96} + \frac{1}{6} - \frac{x^2}{8}\Big|_{1/2}^{1} + \frac{1}{8}x\Big|_{1/2}^{1} - \frac{1}{16}\log(x+1)\Big|_{1/2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{2}x\Big|_0^{1} + \frac{13}{96} - \cancel{\frac{1}{8}} + \frac{1}{32} + \cancel{\frac{1}{8}} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\log 3 + \frac{1}{16}\log 2 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{2} + \frac{\cancel{10}\;5}{\cancel{96}\;48} + \frac{1}{16}\log\frac{2}{3} = \frac{29}{48} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{2} + \frac{1}{16}\log\frac{2}{3}.$$

Perciò, $\iint_D \frac{x^2}{(2+y)^2}\,dx\,dy = 2\iint_D \ldots = \frac{29}{24} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{2} + \frac{1}{8}\log\frac{2}{3}$

[FILA B: moltiplico per 2]