Correzione Appello Analisi II Bio 10/01/14. (1)

1) $f(x,y) = |x||y|^3 e^{xy} + 1$.

a] • Continuità in $\mathbb{R}^2$?

$f(x,y)$ è continua in tutto $\mathbb{R}^2$ poiché somma di funzioni continue in $\mathbb{R}^2$ (infatti $|x|$, $|y|^3$ ed e^{xy} sono funzioni continue poiché composizione di funzioni continue, per cui il loro prodotto risulta continuo in tutto $\mathbb{R}^2$)

• Notiamo poi che f è data esplicitamente dall'espressione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^3 e^{xy} + 1 & \text{se } xy \geq 0 \text{ (cioè } x\geq 0, y \geq 0 \text{ o } x \leq 0, y \leq 0) \\ -xy^3 e^{xy} + 1 & \text{se } xy < 0. \end{cases}$$

- Al di fuori degli assi, cioè nei quadranti aperti, f risulta C^1 poiché, preso un punto P in un quadrante aperto, l'espressione di f è la stessa in un intero intorno di P, ed è C^1 in questo somma di prodotti di funzioni C^1 (si ricordi che le funzioni coordinate x, y sono C^1, da cui y^3 ed e^{xy} sono C^1 per composizione).
- Resta da analizzare il comportamento di f sugli assi (attraversando gli assi, f cambia definizione).

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$; calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,0) - f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,h) - f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x_0||h|^3 e^{x_0 h}}{h} = \lim_{h\to 0} |x_0| h |h| e^{x_0 h} = 0.$$

Sia $y_0 \neq 0$ e calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y_0)-f(0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h||y_0|^3 \overbrace{e^{hy_0}}^{\to 1}}{h} =$$

$$= |y_0|^3 \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}}_{\nexists} \underbrace{e^{hy_0}}_{\to 1} \quad (\star) \Rightarrow \nexists \text{ se } y_0 \neq 0$$

(tale limite esiste solo se $y_0 = 0$)

Segue che f <u>non</u> è derivabile nei punti del tipo $(0,y_0)$, con $y_0 \neq 0$.

Per $y_0 = 0$ (ovvero in $(0,0)$), l'espressione $(\star)$ invece esiste ed è pari a 0.

Calcoliamo poi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,y_0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0.$$

<u>Perciò</u>:

f è derivabile in $\Big(\overbrace{(\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\}) \setminus \{y=0\}}^{\text{“}\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{assi}\}\text{”}}\Big) \cup A$, dove $A = \{y=0\}$

In ciascun punto di A, f ha gradiente nullo. Si noti che $0 \in A$.

- Differenziabilità in $\mathbb{R}^2$.

- In “$\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{assi}\}$”, f è differenziabile in quanto è C^1.
- In $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x=0, y\neq 0\}$, f non è differenziabile in quanto non è nemmeno derivabile.
- Analizziamo il comportamento di f in A. Si ha, in $P_0 = (x_0, 0) \in A$,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,k)-f(x_0,0)-\langle \underbrace{\nabla f(x_0,0)}_{\substack{\parallel \\ 0}}, (h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} = \text{③}$$

in questo $\nabla f(x_0,0)=0$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|x_0+h|\,|k|^3 e^{(x_0+h)k}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

prendiamo in esame l'espressione sotto il segno di limite

$$\left| \frac{|x_0+h|\,|k|^3 e^{(x_0+h)k}}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \underset{\substack{h=\rho\cos\vartheta \\ k=\rho\sin\vartheta}}{=} \left| \frac{|x_0+\rho\cos\vartheta|\,\cancel{\rho^3}^{\,2}|\sin^3\vartheta|\,e^{(x_0+\rho\cos\vartheta)\rho\sin\vartheta}}{\cancel{\rho}} \right|$$

$$= |\rho^2| \underbrace{\left| \frac{|x_0+\rho\cos\vartheta|\,|\sin^3\vartheta|\,e^{(x_0+\rho\cos\vartheta)\rho\sin\vartheta}}{1} \right|} \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

tale espressione è limitata poiché $\rho\to 0$ e x_0 è fissato (inoltre $|\sin^3\vartheta|\le 1$); inoltre la maggiorazione non dipende da ϑ!

Infatti
- $|x_0+\rho\cos\vartheta| \le x_0 + |\rho\cos\vartheta| \le x_0+\rho$
- $|\sin^3\vartheta| \le 1$
- $e^{(x_0+\rho\cos\vartheta)\rho\sin\vartheta} = e^{x_0\rho\sin\vartheta + \rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta} =$

$$= e^{x_0\rho\sin\vartheta}\cdot e^{\rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta} \le e^{|x_0|\rho}\cdot e^{\rho^2}$$

(poiché $\sin\vartheta\le 1$, $\cos\vartheta\sin\vartheta\le 1$, $x_0\le|x_0|$ e l'esponenziale è monotono)

Segue che f è differenziabile in tutto "$\mathbb{R}^2\setminus\{\text{assi}\}$" $\cup\ \{y=0\}$.

Osservazione importante:

Si perverrà a tale conclusione in maniera più diretta osservando che $|y|^3$ è C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$. Pertanto $f(x,y)$ è automaticamente C^1 su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\}$, senza necessità di ulteriori motivazioni. Va invece fatto come sopra lo studio in $\{x=0\}$ (e in particolare nell'origine, dove si è visto da prima che $f(x,y)$ è differenziabile).

2] Il valore minimo assunto da $f(x,y)$ in tutto $\mathbb{R}^2$ è $f(0,0)=1$ (in effetti, $f(x,y) \geq 1 \ \forall (x,y)$ e $f(0,0)=1$).

3] Nel punto $(1,1)$, f è data da

$$f(x,y) = xy^3 e^{xy} + 1. \quad \text{Inoltre } f(1,1) = e+1.$$

Si ha poi:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y^3 e^{xy} + xy^4 e^{xy} \\ 3y^2 x e^{xy} + x^2 y^3 e^{xy} \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 2e \\ 4e \end{pmatrix}.$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^4 e^{xy} + xy^5 e^{xy} & (3y^2+4xy^3)e^{xy} + (xy^3 + x^2y^4)e^{xy} \\ (3y^2+3y^3x)e^{xy} + (2y^3x + x^2y^4)e^{xy} & 6yxe^{xy} + 3y^2x^2e^{xy} + 3x^2y^2e^{xy} + x^3y^3e^{xy} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 3e & 9e \\ 9e & 13e \end{pmatrix}$$

Si ha pertanto:

$$f(x,y) = f(1,1) + \langle \nabla f(1,1) / (x-1, y-1) \rangle +$$

$$\frac{1}{2} \left\langle H_f(1,1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle + o\left(\|(x-1, y-1)\|^2 \right)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = e+1 + \langle (2e, 4e) / (x-1, y-1) \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 3e & 9e \\ 9e & 13e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle +$$

$$+ o(\dots) =$$

$$= e+1 + 2e(x-1) + 4e(y-1) + \frac{1}{2}\left[3e(x-1)^2 + 13e(y-1)^2 + 18e(x-1)(y-1) \right] + o\left(\|(x-1, y-1)\|^2 \right).$$

2) $\quad G(x,y) = \left(2xy^3 + y + (f(x))^2 y \,,\; 3x^2y^2 + y^3 + f(x) \right)$

1] CONSERVATIVITÀ (al solito, si intende nel dominio di $G(x,y)$)

Cominciamo ad imporre che G sia irrotazionale (dovendo f soddisfare un'equazione differenziale, supponemo che sia C^1).

Deve essere $\quad \dfrac{\partial G_1}{\partial y} = \dfrac{\partial G_2}{\partial x}$, ovvero

$$\cancel{6xy^2} + 1 + (f(x))^2 = \cancel{6xy^2} + f'(x)$$

Troviamo cioè l'equazione differenziale $f'(x) = 1 + f^2(x)$.

2] $\begin{cases} f'(x) = 1 + (f(x))^2 \\ f(0) = 1. \end{cases}$ L'equazione è a variabili separabili e si ha $\dfrac{df}{1+f^2} = dx \Rightarrow \arctg f(x) = x + c$

$\Rightarrow f(x) = \tan(x+c)$

e, imponendo $f(0) = 1$, si ha $1 = \tan(0+c) \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$

SOLUZIONE: $f(x) = \tan(x + \pi/4)$.

Osservazione: in tal modo, f non è comunque definita su $\mathbb{R}^2$, poiché $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (6)

Ciò significa che

$$\operatorname{dom} \underline{G} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Tale insieme ovviamente non è semplicemente connesso (non è nemmeno connesso) bensì è unione di strisce, ciascuna delle quali è semplicemente connessa.

Perciò, ragionando su ogni striscia (separatamente) si ha che $\underline{G}(x,y)$ irrotazionale $\Rightarrow$ $\underline{G}(x,y)$ conservativo (ciò che cambia è al limite la costante nella def. del potenziale)

Si noti poi che f è comunque C^1 nel suo dominio, perciò la condizione data ha comunque senso e garantisce la conservatività di $\underline{G}(x,y)$.

3) φ: $\rho = 2 + \operatorname{sen}\vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \varphi: \begin{cases} x(\theta) = (2+\operatorname{sen}\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = (2+\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta, \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi]$

1)

- φ è chiusa poiché $\rho(0) = 2 = \rho(2\pi)$ e quindi $x(0) = x(2\pi)$, $y(0) = y(2\pi)$
- φ è semplice poiché $\boxed{\theta \in [0, 2\pi[}$ (cioè ogni pendenza rispetto al semiasse delle x positive è considerata una sola volta) $\underline{e}$ $\rho(\theta) \neq 0$ $\forall \theta \in [0, 2\pi]$.

  Segue che φ non può passare due volte per lo stesso punto: infatti se $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$, essendo $\rho(\vartheta) \neq 0$ (e quindi $P_1 = (x(\vartheta_1), y(\vartheta_1))$ e $P_2 = (x(\vartheta_2), y(\vartheta_2)) \neq O$) necessariamente i due punti P_1 e P_2 corrispondono a pendenze diverse $\Rightarrow$ $P_1 \neq P_2$.
- φ è regolare:

$$\begin{cases} x'(\theta) = \cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta - 2\operatorname{sen}\theta \\ y'(\theta) = \cos\theta\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}2\theta + 2\cos\theta \end{cases}$$

Dalla seconda abbiamo

$$2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta = 0 \iff \begin{cases} \cos\theta = 0, & \theta\in[0,2\pi] \\ \operatorname{sen}\theta = -1, & \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2}, \ \theta = \frac{3}{2}\pi \\ \theta = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

Si ha poi $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi - 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -3 \neq 0$

$x'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \cos 3\pi - 2\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = -1+2 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ il vettore tangente non si annulla mai $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ è regolare.

- Intersezioni di $\mathcal{C}$ con gli assi:

Gli assi corrispondono alle pendenze $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\theta=\pi$, $\theta=\frac{3}{2}\pi$
($\theta=2\pi$ dà lo stesso punto ottenuto per $\theta=0$)

x y

Si ha $\rho(0) = 2 \Rightarrow P_0 = (2\cos 0, 2\operatorname{sen}0) = (2,0)$

$\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \Rightarrow P_1 = \left(3\cos\frac{\pi}{2}, 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = (0,3)$

$\rho(\pi) = 2 \Rightarrow P_2 = (2\cos\pi, 2\operatorname{sen}\pi) = (-2,0)$

$\rho\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1 \Rightarrow P_3 = \left(\cos\frac{3}{2}\pi, \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right) = (0,-1).$

• Area racchiusa da φ

Utilizzando le formule di Gauss-Green si ha (φ percorsa in senso antiorario)

$$\mathcal{A} = \int_{\varphi} x\,dy = \int_0^{2\pi} (2+\operatorname{sen}\vartheta)\cos\vartheta\left[\operatorname{sen}2\vartheta + 2\cos\vartheta\right] d\vartheta =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \cos\vartheta\operatorname{sen}2\vartheta\,d\vartheta + \int_0^{2\pi} 4\cos^2\vartheta\,d\vartheta + \int_0^{2\pi} \cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}2\vartheta\,d\vartheta + \int_0^{2\pi} 2\cos^2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos^2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta + \int_0^{2\pi} 2(1+\cos2\vartheta)\,d\vartheta + \int_0^{2\pi} 2\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta\,d\vartheta + \int_0^{2\pi} 2\cos^2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= -\cancel{\frac{2\cos^3\vartheta}{3}\Big|_0^{2\pi}} + 4\pi + \cancel{\frac{2\operatorname{sen}2\vartheta}{2}\Big|_0^{2\pi}} + \int_0^{2\pi} 2\,\frac{1+\cos2\vartheta}{2}\,\frac{1-\cos2\vartheta}{2}\,d\vartheta + 0 =$$

$$= 4\pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 2\vartheta)\,d\vartheta = 5\pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos4\vartheta}{2}\,d\vartheta =$$

$$= 5\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cancel{\frac{\operatorname{sen}4\vartheta}{4}\Big|_0^{2\pi}} = \frac{9\pi}{2}.$$

Si perviene allo stesso risultato considerando la formula

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \overbrace{(2+\operatorname{sen}\vartheta)^2}^{\rho(\vartheta)^2}\,d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(4+\operatorname{sen}^2\vartheta + 4\operatorname{sen}\vartheta)\,d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[8\pi + \int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos2\vartheta}{2}\right)d\vartheta - 4\cancel{\cos\vartheta\Big|_0^{2\pi}}\right] = \frac{1}{2}\left[9\pi - \cancel{\frac{\operatorname{sen}2\vartheta}{4}\Big|_0^{2\pi}}\right] = \frac{9\pi}{2}.$$

(che però andrebbe motivata).

4) $S = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2=16,\ z\geq 0,\ y\geq 0\}$

a] Poiché S è data dall'intersezione della sfera di raggio 4 con l'ottante $\{z\geq 0,\ y\geq 0\}$, essa rappresenta un quarto di tale sfera. Siccome l'area della sfera di raggio 4 è data da $4\pi\cdot(4)^2 = 64\pi$, si ha

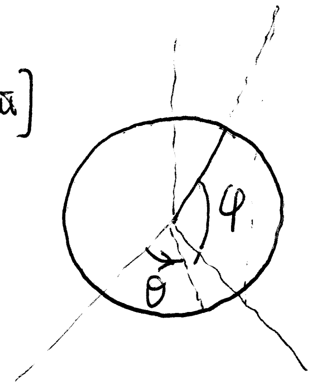
$$\mathcal{A}(S) = \frac{64\pi}{4} = 16\pi .$$

b] Risulta comodo parametrizzare S in coordinate sferiche. In particolare (si noti che qui φ è stato scelto in maniera diversa dal solito; l'importante è mantenere la coerenza)

$$\underline{r}: \begin{cases} x = 4\cos\varphi\cos\theta \\ y = 4\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 4\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

(si noti che il raggio è $=4$)

(in generale, $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e $\theta\in[0,2\pi]$)



Per determinare dove variano φ e θ, notiamo che

$z\geq 0 \Rightarrow \boxed{\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$ (in generale $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$)

$y\geq 0 \Rightarrow 4\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \geq 0$

ma $\cos\varphi\geq 0$ poiché $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow$ deve essere $\mathrm{sen}\,\theta\geq 0 \Rightarrow \boxed{\theta\in[0,\pi]}$

Si ha poi

$$r_\theta = (-4\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 4\cos\varphi\cos\theta,\ 0)$$
$$r_\varphi = (-4\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta,\ -4\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 4\cos\varphi)$$
$$r_\theta\times r_\varphi = (16\cos^2\varphi\cos\theta,\ 16\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 16\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

Quindi

$$\| r_\theta \times r_\varphi \| = \sqrt{256\cos^4\varphi + 256\cos^2\varphi \,\mathrm{sen}^2\varphi} =$$

$$= 16\sqrt{\cos^2\varphi\underbrace{(\cos^2\varphi + \mathrm{sen}^2\varphi)}_{=1}} \underset{(\cos\varphi>0)}{=} 16\cos\varphi$$

Segue

- $$\frac{1}{A}\iint_S x\,dS = \frac{1}{16\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} 4\cos\varphi\cos\theta \cdot 16\cos\varphi \, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{\pi}\cancel{\int_0^{\pi}\cos\theta\, d\theta}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi = 0$$

(si poteva giungere a tale risultato anche ragionando per simmetria)

- $$\frac{1}{A}\iint_S y\,dS = \frac{1}{16\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} 4\cos\varphi\,\mathrm{sen}\theta \cdot 16\cos\varphi\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\theta\, d\theta\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{4}{\pi}\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right)\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi$$

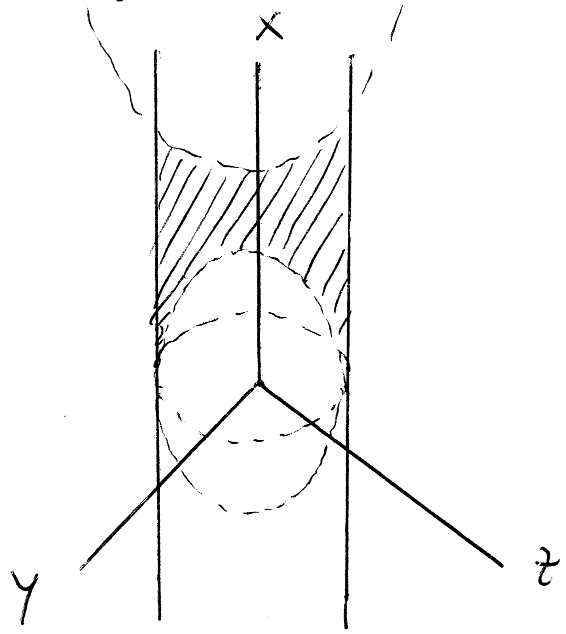
$$= \frac{\cancel{4}}{\cancel{\pi}}(2)\cdot\left[\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{4}} + \underbrace{\cancel{\frac{\mathrm{sen}2\varphi}{4}\Big|_0^{\pi/2}}}_{=0}\right] = 2.$$

- $$\frac{1}{A}\iint_S z\,dS = \frac{1}{16\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} 64\cos\varphi\,\mathrm{sen}\varphi\, d\theta\, d\varphi = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi\,\mathrm{sen}\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{4\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2.$$

5) $I = \iiint\limits_{E} (x+3)\, dx\, dy\, dz$

$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y^2+z^2 \leq 1,\ x^2+y^2+z^2 \geq 1,\ x \geq 0,\ x \leq 2+y^2+z^2 \right\}$



L'insieme di integrazione è quello tratteggiato:

- dentro ad un cilindro
- fuori da una sfera
- sotto ad un paraboloide
- solo per le x positive

Il dominio, cioè, "va dalla sfera al paraboloide"

È perciò conveniente integrare per fili // x, osservando che la proiezione del dominio sul piano Oyz è il cerchio $y^2+z^2 \leq 1$. Si ha allora

(notare che $x^2+y^2+z^2 \geq 1$ equivale a dire $x \geq \sqrt{1-y^2-z^2}$ perché $x \geq 0$)

$$I = \iint\limits_{\{y^2+z^2\leq 1\}} \left[\int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{2+y^2+z^2} (x+3)\, dx \right] dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_{\{y^2+z^2\leq 1\}} \left[\frac{x^2}{2} + 3x \right] \Bigg|_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{2+y^2+z^2} dy\, dz = \iint\limits_{\{y^2+z^2\leq 1\}} \left[\frac{(2+y^2+z^2)^2}{2} + 6 + 3y^2 + 3z^2 - \right.$$

$$\left. \frac{1-y^2-z^2}{2} - 3\sqrt{1-y^2-z^2} \right] dy\, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \left[\frac{(2+\rho^2)^2}{2} + 6 + 3\rho^2 - \frac{1-\rho^2}{2} - 3\sqrt{1-\rho^2} \right]$$

POLARI, jacob. $= \rho$ (θ da 0 a 2π, ρ da 0 a 1: tutto il cerchio)

$d\rho\, d\theta =$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\left[\frac{4+\rho^4+4\rho^2}{2} + 6 + 3\rho^2 - \frac{1}{2} + \frac{\rho^2}{2} - 3\sqrt{1-\rho^2}\right] d\rho\, d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \rho\left[\frac{\rho^4+11\rho^2+15}{2} - 3\sqrt{1-\rho^2}\right] d\rho =$$

$$= \pi\int_0^1 (\rho^5 + 11\rho^3 + 15\rho)\, d\rho + 3\pi\int_0^1 -2\rho\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho =$$

$$= \pi\left[\frac{\rho^6}{6}\Big|_0^1 + \frac{11\rho^4}{4}\Big|_0^1 + 15\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1\right] + 3\pi\, \frac{(1-\rho^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 =$$

$$= \pi\left[\frac{1}{6} + \frac{11}{4} + \frac{15}{2}\right] - \cancel{3}\pi\cdot\frac{2}{\cancel{3}} = \frac{125}{12}\pi - 2\pi = \frac{101}{12}\pi.$$