Maggiorazioni

Maurizio Garrione

Parliamo di limiti in coordinate polari ed uniformità nell'angolo.
Per semplicità, supponiamo di dover calcolare il nostro limite per $(x, y) \to 0$ o per $(x, y) \to \infty$ (se invece stiamo calcolando un limite in un altro punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, è sufficiente scrivere $x = x_0 + \rho \cos\theta, y = y_0 + \rho \sin\theta$ e fare ragionamenti analoghi).
In generale, lo scopo del gioco, una volta passati a coordinate polari, è quello di trovare una disuguaglianza del tipo

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - l| \leq g(\rho),$$

con $g(\rho) \to 0$ per $\rho \to 0$ (se il limite viene calcolato in un punto di $\mathbb{R}^2$) o $\rho \to \infty$ (se il limite è all'infinito). Nell'espressione sopra, l è il "candidato limite".
Ciò significa che scriviamo $f(x, y)$ in coordinate polari e poi cerchiamo di controllare $f(x, y) - l$ dall'alto con una funzione del solo ρ. Per fare ciò dobbiamo eliminare tutte le funzioni che contengono θ, maggiorandole opportunamente.
Qualche principio per fare le maggiorazioni:

1. il valore assoluto del prodotto è uguale al prodotto dei valori assoluti:
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$
2. la disuguaglianza triangolare:
$$|a + b| \leq |a| + |b|;$$
3. se a, b, c, d sono quattro numeri positivi, possiamo scrivere
$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$$
se $a \leq c$ e $b \geq d$!!! (e non $b < d$, infatti se divido per un numero più "grande" ho una quantità più "piccola"). Ovviamente, se si sa soltanto che $a \leq c$, si ha
$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{b};$$

parimenti, se si sa soltanto che $b \geq d$,

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a}{d};$$

4. se si riesce a trovare $M > 0$ tale che $|f(x,y)| \leq M$ per ogni (x,y), cioè se $f(x,y)$ è limitata, si può utilizzare ciò nelle maggiorazioni;

5. per eliminare una funzione di θ, può essere necessario studiarla come una funzione di una variabile, con i principi dell'Analisi 1.

Per esempio, se voglio mostrare che

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = 0,$$

dove

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + xy},$$

scrivo

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho\sin\theta}{\rho^2(1 + \sin\theta\cos\theta)}.$$

Dopo aver semplificato i ρ, devo riuscire a produrre una disuguaglianza del tipo

$$\left|\frac{\sin\theta}{\rho(1 + \sin\theta\cos\theta)}\right| \leq g(\rho),$$

con $g(\rho) \to 0$ per $\rho \to \infty$, quindi devo eliminare le dipendenze da θ. Ma:

- a numeratore,

  $$|\sin\theta| \leq 1,$$

  quindi

  $$\left|\frac{\sin\theta}{\rho(1 + \sin\theta\cos\theta)}\right| = \frac{|\sin\theta|}{|\rho(1 + \sin\theta\cos\theta)|} \leq \frac{1}{|\rho(1 + \sin\theta\cos\theta)|},$$

  usando 1) e 3) sopra;

- a denominatore, sfruttando il principio 3) sopra, devo trovare una disuguaglianza del tipo

  $$|(1 + \sin\theta\cos\theta)| \geq cost,$$

  ove *cost* è una costante positiva.

Allora studio la funzione $h(\theta) = 1+\sin\theta\cos\theta$ come funzione di una variabile: studiandone la derivata prima, determino massimi e minimi nell'intervallo in cui varia θ, ovvero $[0, 2\pi]$, e scopro che, in tale intervallo, è effettivamente $\geq$ di una costante positiva (per esercizio si determini quale). Chiamo questa costante C.
Allora

$$\left|\frac{\sin\theta}{\rho(1+\sin\theta\cos\theta)}\right| \leq \frac{1}{|\rho(1+\sin\theta\cos\theta)|} = \frac{1}{|\rho|\,|(1+\sin\theta\cos\theta)|} \leq \left|\frac{1}{\rho}\right|\left|\frac{1}{C}\right|$$

(usando 1) e 3) sopra). A questo punto, visto che C è una costante strettamente positiva, la funzione $g(\rho) = 1/\rho \cdot 1/C \to 0$ per $\rho \to \infty$ e lo scopo è raggiunto.
Uniformità in θ vuol dire che devo essere in grado di fare una maggiorazione simile eliminando tutti i θ presenti; se invece sono soltanto in grado di fare il ragionamento per ogni θ FISSATO, ma non riesco a trovare una maggiorazione uniforme, non posso dire che il limite corrisponde al candidato (si riguardino gli esempi fatti a lezione).