

UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE
C.d.L. Triennale in
Ingegneria Informatica e dell'Automazione

PROGRAMMA di
ANALISI MATEMATICA 2 – 9 CFU
A.A. 2012/2013

Dr. Giuseppina AUTUORI

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE. Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie di ordine n e concetto di integrale generale. Modello di Malthus come prototipo di ODE. Equazioni del 1° ordine in forma generale e introduzione al Problema di Cauchy. Equazioni a variabili separabili. Teorema di Cauchy (senza dim) per tali tipi di equazioni. Esempi sui Problemi di Cauchy. Controesempi sulla perdita dell'esistenza e/o dell'unicità della soluzione. Equazione logistica. Equazioni omogenee. Equazioni lineari del 1° ordine. Teorema (con dim): l'integrale generale dell'eq. completa si ottiene dalla somma di quello dell'omogenea associata più una soluzione particolare. Risoluzione dell'eq. omogenea associata e determinazione della soluzione particolare. Determinazione dell'integrale generale. Teorema di Cauchy (senza dim) su esistenza e molteplicità e rappresentazione dell'unica soluzione, attraverso la determinazione della costante arbitraria. Equazioni differenziali lineari del 2° ordine. Espressione canonica e problema di Cauchy (PC) associato. Teorema (senza dim) di esistenza e unicità per (PC). Equazione omogenea associata (H) e suo integrale generale come spazio vettoriale di dimensione 2. Lineare indipendenza delle soluzioni di (H) e matrice Wronskiana. Integrale generale dell'eq. completa come somma di quello di (H) più una soluzione particolare. Eq. a coefficienti costanti: equazione caratteristica e integrale generale di (H). Ricerca della soluzione particolare di un'eq. lineare: metodo della somiglianza e metodo della variazione delle costanti.

CURVE E FUNZIONI VETTORIALI. Parametrizzazioni ed esempi di curve nel piano e nello spazio. Def. di limite per una curva. Osservazioni sulle proprietà dei limiti (unicità, limite della somma e del prodotto per una costante, etc.). Continuità. Def. di curva chiusa, semplice, piana. Derivabilità e orientamento. Velocità scalare, curve regolari e regolari a tratti. Unione di archi di curva e condizioni di raccordo. Calcolo differenziale vettoriale. Teorema (con dim) : derivata della somma, del prodotto per una costante, etc. Integrabilità. Teorema fond. del calcolo integrale per funzioni a valori vettoriali (senza dim). Lemma (senza dim): il modulo dell'integrale è minore o uguale all'integrale del modulo. Curve piane e grafici di funzioni. Proprietà corrispondenti (cenni di dim). Curve piane in forma polare e proprietà (no dim). Lunghezza di un arco di curva. Poligonali e curve rettificabili. Teorema (con dim): una curva regolare è rettificabile e calcolo della sua lunghezza. Unione di curve rettificabili e osservazioni relative. Esempi di calcolo di lunghezza di curve. Esempio di curva non rettificabile. Cambiamenti di parametrizzazione: curve equivalenti e cambi di orientamento, con esempi. Ascissa curvilinea e versore tangente. Integrali di linea di prima specie: definizione e calcolo. Teorema (con dim): invarianza degli integrali di linea per parametrizzazioni equivalenti o cambi di orientamento. Applicazioni fisiche: baricentro di un corpo, momento d'inerzia rispetto ad un asse ed esempi. Elementi di geometria differenziale per curve C^2 : versore tangente, normale principale, curvatura e raggio di curvatura nel piano e nello spazio. Esempio di calcolo di T , N e k per l'elica cilindrica. Calcolo della curvatura attraverso il prodotto

vettore delle derivate della parametrizzazione nello spazio; caratterizzazione nel caso delle curve piane e dei grafici di funzioni.

CALCOLO INTEGRALE PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI. INTEGRALI DOPPI. Richiami sulla costruzione geometrica e sulle somme di Cauchy per funzioni di una sola variabile ed estensione al caso di funzioni di due variabili definite su rettangoli R . Definizione di integrabilità su R per funzioni limitate. Es. di funzione limitata non integr. in R . Teorema (senza dim): una funzione continua in un R è integrabile. Significato geometrico dell'integrale doppio. Teorema di riduzione per R ed esempio. Integrali per funzioni a variabili separate in R con esempio. Domini non rettangolari. Controesempio di funzione continua non integrabile in dominio non rettangolare. Domini semplici e regolari: esempi e proprietà. Teorema (senza dim): una funzione continua su un dominio regolare è integrabile. Definizione di insieme misurabile. Ogni insieme regolare è misurabile. Esempi di insiemi di misura nulla. Teorema (senza dim): una funzione f definita in Ω regolare, tale che l'insieme dei punti di discontinuità di f abbia misura nulla è integrabile in Ω . Teorema di riduzione per funzioni discontinue (no dim). Proprietà degli integrali doppi. Teorema di riduzione per domini semplici (con dim) ed esempi di calcolo. Baricentro di un corpo, momento d'inerzia ed esempi. Cambiamento di variabili. Coordinate polari, ellittiche ed esempi.

CAMPI VETTORIALI. Definizione di campo vettoriale e linee di campo. Esempi di campi. Sistema per determinare le linee di campo e considerazioni di unicità. Esercizi per determinare le linee di campo. Operatore gradiente e laplaciano. Operatori rotore e divergenza. Def. di campo irrotazionale e solenoidale. Esempi svolti sul calcolo di rotore e div. Identità differenziali e proprietà degli operatori. Integrale di linea di seconda specie e lavoro compiuto da una forza. Circuitazione di un campo ed esempi svolti. Additività dell'int. di linea di seconda specie rispetto all'unione di curve. Confronto e osservazioni su integrali di prima e seconda specie. Campi conservativi e potenziali. Lemma (no dim): il lavoro di un campo cons. dipende solo dagli estremi della curva. Circuitazione di campi conservativi. Teorema (con dim): condizioni equivalenti per un campo conservativo. Campi irrotazionali. Insiemi semplicemente connessi. Relazione tra campi conservativi e irrotazionali ed esempi. Forme differenziali. Comparazione tra campi vettoriali e forme differenziali. Forme chiuse, esatte e loro relazione. Integrale di linea di una forma differenziale. Teorema (con dim): formula di Gauss-Green nel piano. Calcolo di aree mediante Gauss-Green ed esempi.

ANALISI COMPLESSA. Il Campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi e sua topologia. Limiti per funzioni di variabile complessa e a valori in $\mathbb{C}$. Successioni di numeri e di funzioni in $\mathbb{C}$. Tipi di convergenza e loro relazioni. Serie di potenze. Lemma di Abel e sue conseguenze. Raggio di convergenza. Convergenza assoluta delle serie di potenze all'interno del disco di convergenza B . Convergenza totale sui compatti contenuti in B . Divergenza al di fuori di B . Formula di Cauchy-Hadamard e criterio del rapporto per determinare il raggio di convergenza. Esempi. Proprietà delle serie di potenze convergenti e serie derivata.

FUNZIONI $\mathbb{C}$ -DIFFERENZIABILI. Funzioni somma di serie di potenze e loro proprietà. L'esponenziale e il logaritmo in $\mathbb{C}$. Argomento di un numero complesso. Radici n -esime di un numero complesso. Funzioni $\mathbb{C}$ -differenziabili e condizioni di Cauchy-Riemann (C-R). Proprietà delle derivate e regole di calcolo. Esempi svolti. Formulazione complessa e formulazione in coordinate polari delle condizioni di C-R. Funzioni olomorfe e armoniche. Integrazione di funzioni a valori in $\mathbb{C}$. Integrazione di funzioni di variabile complessa. Teorema fondamentale del calcolo (con dim). Confronto con le forme differenziali. Teorema di caratterizzazione delle funzioni che ammettono primitiva (con dim). Teorema integrale di Cauchy (no dim). Proprietà delle funzioni olomorfe con particolare riferimento all'integrabilità lungo curve e al possesso di primitive. Teorema integrale di Cauchy generalizzato (no dim). Formula integrale di Cauchy (con dim).

Teorema (con dim): una funzione olomorfa è loc. sviluppabile in serie di potenze e viceversa. Indipendenza dei coefficienti della serie dal raggio. Serie di Taylor per funzioni olomorfe. Teorema di Morera sui triangoli (con dim) e su curve chiuse reg. a tratti (con dim).

FUNZIONI ANALITICHE. Teorema (con dim): equivalenza tra analiticità e olomorfia. Zeri di una funzione analitica e molteplicità. Proprietà delle funzioni analitiche nulle in un intorno di un punto (proposizione con dim). Principio di identità. Zeri delle funzioni analitiche quali punti isolati del dominio. Prolungamento analitico. Esistenza del prolungamento analitico per funzioni di variabile reale sviluppabili in serie di potenze. Disuguaglianze di Cauchy sui coefficienti dello sviluppo in serie di una funzione analitica. Teorema di Liouville (con dim). Teorema fondamentale dell'algebra (con dim). Limite uniforme di successioni di funzioni analitiche. Punti singolari delle funzioni analitiche e loro classificazione. Residuo di una funzione analitica in un punto singolare. Calcolo dei residui come derivate, con esempi. Il Teorema dei residui (con dim). Teorema dell'indicatore logaritmico (no dim). Lemma del grande cerchio (con dim) e del piccolo cerchio (con dim) e applicazioni. Lemma di Jordan (con dim).

TRASFORMATA DI LAPLACE. Introduzione e definizione di funzioni Laplace-trasformabili (L-trasf.). Ascissa di convergenza e semipiano di convergenza. Funzioni a crescita esponenziale e loro trasformata. Funzione a gradino, impulso, impulso unitario e istantaneo e loro trasformate. Linearità della trasformata (con dim). Trasformate di seno e coseno, seno e coseno iperbolici. Concetto di segnale; esempi di segnali e relative trasformate. Limitatezza e olomorfia della trasformata (con dim). Formula iterativa della derivata della trasformata. Esempi svolti. Ulteriori proprietà della trasformata con esempi. Segnali periodici e relativa trasformata di Laplace (con dim). Onda quadra, onda quadra modificata e relative trasformate. Trasformata della derivata (con dim) e Teorema del valor finale (con dim). Formula iterativa per il calcolo della trasformata della derivata n -esima. Convoluzione e trasformata della convoluzione (con dim). Risoluzione di ODE del 2° ordine lineari omogenee, mediante la trasformata di Laplace. Risoluzione di problemi di Cauchy con ODE di ordine n lineari, mediante la trasformata di Laplace e il prodotto di convoluzione.

TRASFORMATA DI FOURIER. Definizione, linearità e continuità della mappa che associa ad una funzione sommabile in $\mathbf{R}$ la sua trasformata di Fourier. Esempi di funzioni e relative trasformate. Antitrasformata di Fourier. Proposizione con dim: la trasformata di F di una funzione sommabile è continua e infinitesima all'infinito. Simmetria della trasformata di F . (con dim). Parte pari e dispari (con dim) ed esempi. Formula di inversione (con dim) ed esempi. Formula di dualità (con dim). Trasformata di omotetie, traslazioni, prodotto per una funzione esponenziale (con dim). Trasformata della derivata e derivata della trasformata (con dim) ed esempi. Funzioni di Gauss e relative trasformate. Trasformata della convoluzione (con dim). Funzioni a decrescenza rapida e loro legame con le funzioni limitate, sommabili e/o a quadrato sommabile. Trasformata di Fourier per funzioni a quadrato sommabile. Equazioni differenziali e trasformata di Fourier.

TESTI DI RIFERIMENTO

M. Bramanti, C. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica 2*, Ed. Zanichelli

G.C. Barozzi, *Matematica per l'ingegneria dell'informazione*, Ed. Zanichelli