UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE
C.d.L. Triannale in
Ingegneria Biomedica

PROGRAMMA di
ANALISI MATEMATICA 2 – 6 CFU
A.A. 2013/2014

Dr. Giuseppina AUTUORI

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE. Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie di ordine n e concetto di integrale generale. Modello di Malthus come prototipo di ODE. Equazioni del 1° ordine in forma generale e introduzione al Problema di Cauchy (PC). Equazioni a variabili separabili. Teorema di Cauchy (esistenza e unicità) per equazioni a variabili separabili. Controesempi sulla perdità dell'esistenza e/o dell'unicità della soluzione. Equazione logistica. Equazioni omogenee (2 tipologie). Equazioni lineari del 1° ordine. <u>Integrale generale dell'equazione completa come somma di quello dell'equazione omogenea associata più una soluzione particolare</u>. Risoluzione dell'eq. omogenea associata e determinazione della soluzione particolare. Determinazione dell'integrale generale dell'equazione completa. Teorema di Cauchy su esistenza e unicità per ODE lineari del 1° orinde e <u>rappresentazione dell'unica soluzione attraverso la determinazione della costante arbitraria</u>. Equazioni differenziali lineari del 2° ordine. Espressione canonica e (PC) associato. Osservazione sulle codizioni iniziali. Teorema di Cauchy di esistenza e unicità per (PC). Equazione omogenea associata (H) e suo integrale generale come spazio vettoriale di dimensione 2. Lineare indipendenza delle soluzioni di (H) e matrice Wronskiana. Integrale generale dell'equazione completa come somma di quello di (H) più una soluzione particolare. Equazioni a coefficienti costanti: equazione caratteristica e integrale generale di (H). Ricerca della soluzione particolare di un'equazione lineare del 2° ordine: metodi della somiglianza e della variazione delle costanti.

TRASFORMATA DI LAPLACE NEL CAMPO REALE. Funzioni generalmente continue e generalmente regolari: definizione e proprietà. <u>Formula fondamentale del calcolo e Teorema di integrazione per parti.</u> Funzioni di ordine esponenziale. <u>Classi di funzioni di ordine esponenziale.</u> Definizione di funzione Laplace trasformabile. <u>Proposizione: se l'integrale converge per un certo s allora converge per tutti i punti maggiori di s</u>. Ascissa di convergenza. Esempio di funzione con ascissa di convergenza uguale a –infinito. Trasformate di alcune funzioni elementari. <u>Comportamento asintotico della trasformata dell'esponenziale</u>. Proprietà della trasformata (linearità, riscalamento, traslazione e ritardo) con esempi. <u>Ttrasformata della derivata e formule per le trasformate delle derivate di ordine superiore.</u> <u>Trasformata della primitiva.</u> Traformata del prodotto di una potenza per una funzione di ordine esponenziale. <u>Trasformata di una funzione periodica</u>. Funzioni equivalenti. Teorema di unicità di Lerch. Antitrasformata di Laplace e sue proprietà (linearità, riscalamento, traslazione e ritardo). Applicazione della trasformata di Laplace alla risoluzione di problemi di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali lineari.

CURVE E INTEGRALI CURVILINEI. Definizione di curva in R^n come funzione vettoriale. Concetto di parametrizzazione. Passaggio dalla rappresentazione cartesiana a quella parametrica e viceversa. Definizione di limite per una curva. Osservazioni sulle proprietà dei limiti (unicità, limite della somma e del prodotto per una costante, etc.). Continuità. Definizioni di curva chiusa, semplice, piana. Sostegni di curve ed esempi notevoli (circonferenza, ellisse, elica cilindrica, folium di Cartesio). Derivabilità e orientamento. Velocità scalare, curve regolari e regolari a tratti. Unione di archi di curva e condizioni di raccordo. Astroide. Teorema (calcolo differenziale vettoriale).

Parametro d'arco e ascissa curvilinea. Curve piane e grafici di funzioni. Proprietà corrispondenti (cenni di dim). Curve piane in forma polare e proprietà. Spirale di Archimede. Elementi di geometria differenziale delle curve: vettore tangente, vettore normale, curvatura e raggio di curvatura, rispetto ad un parametro generico e rispetto all'ascissa curvilinea. Elica cilindrica. Formula della curvatura mediante prodotto vettore tra velocità e accelerazione, con applicazione al caso delle curve in R^2 e al caso dei grafici di funzioni. Lunghezza di un arco di curva. Curve rettificabili. Lunghezza di curve unioni di curve rettificabili. Esempio dell'astroide. Teorema di rettificabilità e formula per il calcolo della lungheza di una curva regolare. Cambiamenti di parametrizzazioni e curve equivalenti. Invarianza della lunghezza di un arco di curva per parametrizzazioni equivalenti o cambi di orientazione. Introduzione agli integrali di linea mediante l'esempio del calcolo della massa di un filo di densità assegnata. Definizione di integrale di linea (di 1^a specie) e sua invarianza per parametrizzazioni equivalenti o cambi di orientazione. Applicazioni fisiche e geometriche: baricentro di un corpo e momento di inerzia.

ELEMENTI di TOLOLOGIA in R^n**.** R^n come spazio vettoriale (operazione somma e prodotto per scalare). Prodotto scalare euclideo, norma euclidea e distanza euclidea e relative proprietà. Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Intorni sferici in Rn. Definizione di punto: interno, esterno, di frontiera, di accumulazione e isolato per un sottoinsieme di R^n. Osservazioni sulle relazioni tra punti interni, esterni, di accumulazione, di frontiera, etc. Esempi con grafici e determinazione dei punti interni, isolati, esterni, etc. Definizione di insieme aperto e chiuso, e osservazioni relative. Chiusura di un insieme. Definizione di insieme connesso per archi, limitato. Definizione di insieme compatto come chiuso e limitato.

LIMITI E CONTINUITÀ PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI**.** Funzioni di più variabili scalari e vettoriali. Insiemi di livello per funzioni scalari e rappresentazione matriciale per funzioni vettoriali lineari. Definizione di limite per funzioni scalari. Osservazioni sulla validità dei teoremi sui limiti noti per n=1 (unicità, limite della somma, del prodotto, del quoziente e del prodotto per uno scalare). Esempi di calcolo di limite con la definizione. Restrizioni e non esistenza di limiti. Esempi di calcolo lungo rette. Passaggio a coordinate polari e concetto di uniformità rispetto a θ. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del limite e uniformità in θ. Definizione di funzione continua. Teoremi di: permanenza del segno, Weierstrass, dei valori intermedi, degli zeri. Estensione delle definizioni a funzioni vettoriali.

DERIVATE DIREZIONALI, GRADIENTE e DIFFERENZIABILITÀ PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI. Definizione di derivata direzionale ed esempi di calcolo per funzioni costanti e lineari. Derivate parziali e regole di calcolo. Definizione di derivabilità e gradiente. Controesempi: derivabilità non implica continuità e viceversa. Derivate successive, matrice Hessiana e Teorema di Schwartz. Definizione di differenziabilità. Relazioni tra differenziabilità, derivabilità e continuità. Formula del gradiente e direzioni di massima e minima pendenza. Equazione dell'iperpiano tangente per funzioni differenziabili o solo derivabili e osservazioni. Esempi. Teorema del differenziale. Esempi di funzioni differenziabili. Definizioni di derivabilità e differenziabilità per funzioni a valori vettoriali. Matrice Jacobiana. Differenziale di funzioni composte in R^2 (e cenni in R^n). Funzioni con gradiente nullo in un connesso. Formula di Taylor fino al II ordine per funzioni scalari di due variabili. Esempi ed esercizi. Definizione di punto di massimo/minimo relativo per funzioni di più variabili definite su aperti di R^n. Localizzazione. Condizione necessaria del I ordine. Punti critici. Definizione di punto di sella. Condizione necessaria del II ordine, con enunciato semplificato per n=2. Condizione sufficiente in R^n. Polinomio caratteristico dell'hessiana e segno degli autovalori (regola di Cartesio), con approfondimento nel caso n=2. Enunciato semplificato per la condizione sufficiente in R^2. Osservazioni ed esempi.

CALCOLO INTEGRALE PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI. INTEGRALI DOPPI. Definizione di integrale doppio per funzioni limitate su rettangoli. Esempio di funzione limitata in un rettan-golo, ma non integrabile. Teorema: funzione continua su un rettangolo è integrabile.

Integrale doppio come volume e Teorema di riduzione per funzioni limitate su rettangoli. Metodo di riduzione per funzioni a variabili separabili su rettangoli. Funzioni integrabili in domini non rettangolari. Insiemi semplici e regolari. Esempi e proprietà. Teorema: f continua in Ω regolare è integrabile. Insiemi misurabili e properità connesse. Teorema: f limitata in Ω regolare, f continua in Ω tranne al più in un insieme di misura nulla; allora f è integrabile. Teorema di riduzione per funzioni discontinue. Proprietà degli integrali dippi: linearità, positività, monotonia rispetto all'integranda e rispetto al dominio, additività e annullamento. Teorema per funzioni continue e limitate in insiemi misurabili e limitati (integrale nullo implica integranda nulla e teorema della media). Teorema di riduzione per domini x-semplici o y-semplici ed esempi svolti. Integrale su un dominio regolare come somma di integrali su domini semplici. Applicazioni fisiche: baricentro e momento d'inerzia. Cambiamento di variabili. Formula del cambiamento di variabili per il calcolo di un integrale doppio. Coordinate polari, ellittiche ed esempi. INTEGRALI TRIPLI. Cenni alla costruzione astratta. Insiemi normali in R^3 rispetto al piano (x,y). Primo teorema di Guldino. Formule di riduzione per fili e per strati, ed esempi svolti. Cambiamenti di variabili. Coordinate polari sferiche e coordinate cilindriche.

CAMPI VETTORIALI. Definizione di campo vettoriale e linee di campo. Esempi di campi. Sistema per determinare le linee di campo e considerazioni di unicità. Esercizi relativi. Operatori: gradiente, laplaciano, rotore e diver-genza. Definizione di campo irrotazionale e solenoidale. Esempi ed esercizi sul calcolo di rotore e divergenza. Identità differenziali e proprietà degli operatori. Integrale di linea di 2^a specie e lavoro compiuto da una forza. Circuitazione di un campo. Additività dell'integrale di linea di 2^a specie rispetto all'unione di curve. Confronto tra integrali di 1^a e 2^a specie. Campi conservativi e potenziali. Il lavoro di un campo conservativo lungo una curva regolare a tratti dipende solo dagli estremi della curva. Circuitazione di campi coservativi. Caratterizzazione dei campi conservativi. Campi irrotazionali. Insiemi semplicemente connessi. Relazione tra campi conservativi e irrotazionali, con esempi. Parallelismo tra campi vettoriali e forme differenziali (cenni).

FORMULE DI GAUSS-GREEN NEL PIANO E APPLICAZIONI. Domini orientati positivamente. Formule di Gauss-Green in R^2. Calcolo di aree mediante integrali curvilinei.

SUPERFICI PARAMETRICHE E INTEGRALI DI SUPERFLICIE. Introduzione al concetto di superficie e superfici "note": esempio del paraboloide. Definizione di superficie parametrica e di superficie regolare. Esempi: cilindro, sfera, superfici date da grafici di funzioni C^1. Piano tangente ad una superficie in un punto e versone normale. Orientabilità di una superficie, con esempi. Bordo di una superficie e orientazione positiva. Superfici regolari a pezzi. Cambi di coordinate e parametrizzazioni equivalenti. Area di una superficie con esempi. Baricentro di una curva e Teorema di Guldino (area di superfici di rotazione); esempio notevole: curva nel piano (x,z) e rotazione attorno all'asse z. Integrali di superficie di funzioni continue. Baricentro e massa di una superficie con esempi. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie. Teorema della divergenza e Teorema di Stokes (o del rotore). Esempi svolti.

N.B. Gli argomenti sottolineati sono stati svolti con dimostrazione.

TESTI DI RIFERIMENTO

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Elementi di Analisi Matematica 2*, Ed. Liguori
P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercitazioni di Analisi Matematica, vol.2, parte* I *e* II, Ed. Liguori
S. Salsa, A. Squellati, *Esercizi di Matematica, vol. 2*, Ed. Zanichelli
Dispense Prof. C. Marcelli sulla *Trasformata di Laplace*