Trasformate di Laplace nel campo reale

1 Funzioni generalmente continue

Definizione 1.1 Una funzione f si dice **generalmente continua in** (a, b) se esistono un numero finito di punti $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ tali che f è definita e continua in ogni intervallo aperto (x_{k-1}, x_k), $k = 1, \ldots, n$, ed è prolungabile con continuità in ogni intervallo chiuso $[x_{k-1}, x_k]$, cioè esistono finiti i limiti

$$f(x_k^+) := \lim_{x \to x_k^+} f(x), \quad k = 0, \ldots, n-1 \qquad \text{e} \qquad f(x_k^-) := \lim_{x \to x_k^-} f(x), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Una funzione si dice generalmente continua in I, con I intervallo non limitato, se lo è in ogni intervallo limitato $(a, b) \subset I$.

Quindi una funzione generalmente continua in (a, b) presenta al più un numero finito di discontinuità di prima specie, con salto limitato. Naturalmente una funzione generalmente continua su un intervallo non limitato può presentare un numero infinito di punti di salto, ma in ciascun intervallo limitato essi sono in numero finito.

Si verifica facilmente che la somma ed il prodotto di due funzioni generalmente continue è una funzione generalmente continua. Inoltre, ogni funzione generalmente continua in un intervallo limitato (a, b) è limitata, perché è prolungabile con continuità in ogni intervallo $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$; tuttavia, in generale non ammette massimo o minimo. Infine, ogni funzione generalmente continua in (a, b) è integrabile e si ha

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Nelle applicazioni è spesso trascurabile l'eventuale alterazione del valore di una funzione in un numero finito di punti, cioè due funzioni generalmente continue che differiscono solo in un numero finito di punti possono essere considerate uguali. Per rendere rigoroso questo concetto, diamo la seguente definizione.

Definizione 1.2 Siano f e g due funzioni generalmente continue in I. Esse si dicono **equivalenti** (e si scrive $f \approx g$) se in ogni intervallo $(a, b) \subset I$ esse differiscono al più in un numero finito di punti.

Definizione 1.3 Una funzione f si dice **generalmente regolare in** (a, b) se esistono un numero finito di punti $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ tali che f è di classe C^1 in ogni intervallo aperto (x_{k-1}, x_k), $k = 1, \ldots, n$, ed è prolungabile in modo C^1 in ogni intervallo chiuso $[x_{k-1}, x_k]$, cioè esistono finiti i limiti $f(x_k^+), f'(x_k^+)$ per $k = 0, \ldots, n-1$ e $f(x_k^-), f'(x_k^-)$ per $k = 1, \ldots, n$.

Se f è generalmente regolare allora la derivata f' è generalmente continua, quindi è integrabile. Per essa vale la seguente estensione della formula fondamentale del calcolo integrale.

Teorema 1.4 *Sia f continua su $[a,b]$ e generalmente regolare in (a,b). Allora*

$$\int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

Per dimostrare il Teorema, usiamo il seguente Lemma.

Lemma 1.5 *Sia f una funzione continua in $[\alpha,\beta]$, di classe C^1 in (α,β), con f' limitata. Allora*

$$\int_\alpha^\beta f'(x)\ \mathrm{d}x = f(\beta) - f(\alpha).$$

Dimostrazione. Denotando con $F(x) := \int_\alpha^x f'(t)\ \mathrm{d}t$ la funzione integrale di f', si ha che F è continua su $[\alpha,\beta]$, derivabile su (α,β), con $F'(x) = f'(x)$ per ogni $x \in (\alpha,\beta)$. La funzione differenza $G(x) := F(x) - f(x)$ è continua su $[\alpha,\beta]$, derivabile su (α,β), con $G'(x) = 0$ per ogni $x \in (\alpha,\beta)$. Per il criterio di monotonia la funzione G è costante in $[\alpha,\beta]$, ciè esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) = f(x) + k$ per ogni $x \in [\alpha,\beta]$. Dato che $F(\alpha) = 0$, si ha $k = -f(\alpha)$ e quindi

$$\int_\alpha^\beta f'(x)\ \mathrm{d}x = F(\beta) = f(\beta) - f(\alpha).$$

$\square$

Dimostrazione del Teorema 1.4. La derivata $f'(x)$ è definita e continua in $[a,b] \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Applicando il Lemma 1.5 si ha

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\ \mathrm{d}x = f(x_k) - f(x_{k-1}), \qquad \text{per ogni } k = 1, \ldots, n.$$

Quindi

$$\int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right) = f(b) - f(a).$$

$\square$

Come conseguenza del Teorema 1.4 si prova la seguente estensione della formula di integrazione per parti.

Teorema 1.6 *Siano f, g continue su $[a,b]$ e generalmente regolari in (a,b). Allora*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. La funzione prodotto fg è continua su $[a,b]$ e generalmente regolare in (a,b), con $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ad eccezione di un numero finito di punti. Quindi per il teorema precedente si ha

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\ \mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

da cui la tesi. $\square$

2 Funzioni di ordine esponenziale

Definizione 2.1 Una funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, generalmente continua in ogni intervallo $[0, a]$, $a > 0$, si dice **di ordine esponenziale** se esistono due costanti $C, \alpha > 0$ tali che

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t} \qquad \text{per ogni } t \geq 0. \tag{2.1}$$

Osservazioni.

(2.1) Se f e g sono funzioni di ordine esponenziale, allora anche la somma $f + g$ e il prodotto fg sono di ordine esponenziale. Infatti,

$$\begin{aligned} |f(t) + g(t)| &\leq |f(t)| + |g(t)| \leq C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} \leq \\ &\leq C_1 e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} + C_2 e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} \leq (C_1 + C_2)e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}; \\ |f(t)g(t)| &\leq |f(t)| \cdot |g(t)| \leq C_1 e^{\alpha_1 t} \cdot C_2 e^{\alpha_2 t} = (C_1 \cdot C_2)e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}. \end{aligned}$$

(2.2) Le funzioni limitate sono di ordine esponenziale. Infatti, esiste $C > 0$ tale che $|f(t)| \leq C \leq Ce^{\alpha t}$ per ogni $t \geq 0$ e $\alpha > 0$.

(2.3) se la (2.1) vale *definitivamente*, cioè esiste $t_0 > 0$ tale che (2.1) vale per ogni $t \geq t_0$, allora la funzione è di ordine esponenziale. Infatti f è limitata in $[0, t_0]$, quindi esiste $K > 0$ tale che $|f(t)| \leq K \leq Ke^{\alpha t}$ per ogni $t \in [0, t_0]$. Quindi, ponendo $M := \max\{C, K\}$ si ha

$$|f(t) \leq Me^{\alpha t} \qquad \text{per ogni } t \geq 0.$$

(2.4) Se per qualche $\alpha > 0$ si ha $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{e^{\alpha t}} = 0$, allora f è di ordine esponenziale. Infatti, dalla definizione di limite (per $\varepsilon = 1$) segue che esiste un valore $t_0 > 0$ tale che $|f(t)| \leq e^{\alpha t}$ per ogni $t \geq t_0$. Quindi per il punto precedente la funzione è di ordine esponenziale.

(2.5) Se f è di ordine esponenziale, allora anche la sua funzione integrale $F(t) := \int_0^t f(\tau)\, \mathrm{d}\tau$ è di ordine esponenziale. Infatti, dato che $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ per ogni $t \geq 0$, per qualche $C, \alpha > 0$, si ha

$$|F(t)| = \left| \int_0^t f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)|\, \mathrm{d}\tau \leq \int_0^t Ce^{\alpha\tau} \mathrm{d}\tau = \frac{C}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) < \frac{C}{\alpha} e^{\alpha t}.$$

Di conseguenza, se f è una funzione continua, generalmente regolare, con f' di ordine esponenziale, allora anche f è di ordine esponenziale, poiché $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)\, \mathrm{d}\tau$.

Da quanto osservato sopra segue che i polinomi, le funzioni $\sin t$, $\cos t$, le funzioni esponenziali $e^{\alpha t}$, sono tutte funzioni continue di ordine esponenziale. Tuttavia esistono funzioni continue che non sono di ordine esponenziale, come ad esempio $f(t) := e^{t^2}$. In generale, se $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{e^{\alpha t}} = +\infty$ per ogni $\alpha > 0$, allora f non è di ordine esponenziale.

3 Trasformata di Laplace

Definizione 3.1 Una funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, generalmente continua in ogni intervallo $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$, si dice **trasformabile alla Laplace** se esiste un numerno reale $s \in \mathbb{R}$ tale che l'integrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\ \mathrm{d}t$ converge.

Proposizione 3.2 *Se l'integrale* $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\ \mathrm{d}t$ *converge per* $s = s_0 \in \mathbb{R}$, *allora converge anche per ogni* $s > s_0$.

Dimostrazione. Dato che l'integrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t}\ \mathrm{d}t$ converge, la funzione integrale $G(t) := \int_0^t f(\tau)e^{-s_0\tau}\ \mathrm{d}\tau$ ammette limite finito per $t \to +\infty$. Quindi, essendo continua su $[0, +\infty)$, la funzione G è limitata, cioè esiste $k > 0$ tale che $|G(t)| \leq k$ per ogni $t \geq 0$. Allora, fissato $s > s_0$, integrando per parti si ottiene

$$\int_0^t f(\tau)e^{-s\tau}\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t f(\tau)e^{-s_0\tau}e^{-(s-s_0)\tau}\ \mathrm{d}\tau = \left[G(\tau)e^{-(s-s_0)\tau}\right]_0^t +$$

$$+(s-s_0)\int_0^t G(\tau)e^{-(s-s_0)\tau}\ \mathrm{d}\tau = G(t)e^{-(s-s_0)t} + (s-s_0)\int_0^t G(\tau)e^{-(s-s_0)\tau}\ \mathrm{d}\tau$$

Passando al limite per $t \to +\infty$ si ottiene

$$\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\ \mathrm{d}\tau = (s-s_0)\int_0^{+\infty} G(\tau)e^{-(s-s_0)\tau}\ \mathrm{d}\tau$$

dove l'ultimo integrale converge perché $|G(t)e^{-(s-s_0)t}| \leq ke^{-(s-s_0)t}$ e $s - s_0 > 0$. $\square$

Definizione 3.3 Sia f una funzione trasformabile. Si definisce **ascissa di convergenza** di f il valore

$$\sigma(f) := \inf\left\{ s \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\ \mathrm{d}t \text{ converge} \right\}.$$

Per le proprietà dell'estremo inferiore, dalla proposizione appena dimostrata segue che l'integrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\ \mathrm{d}t$ converge se $s > \sigma$, mentre non converge se $s < \sigma$.

Osserviamo che esistono funzioni trasformabili con ascissa di convergenza $\sigma = -\infty$. Presa ad esempio la funzione $f(t) := e^{-t^2}$, si ha che l'integrale

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2-st}\ \mathrm{d}t$$

converge per ogni $s \in \mathbb{R}$ (anche negativo), perché $e^{-t^2-st} = o(e^{-\frac{1}{2}t^2})$ per $t \to +\infty$, per qualunque $s \in \mathbb{R}$.

Definizione 3.4 Sia f una funzione trasformabile. Si definisce **trasformata di Laplace** di f la funzione

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\ \mathrm{d}t$$

definita per $s > \sigma(f)$.

Esempi. Si verifica facilmente che

- $\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{s}$, per ogni $s > 0$;
- $\mathcal{L}[t](s) = \int_0^{+\infty} te^{-st}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{s^2}$, per ogni $s > 0$;
- $\mathcal{L}[t^n](s) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-st}\ \mathrm{d}t = \frac{n!}{s^{n+1}}$, per ogni $s > 0$;
- $\mathcal{L}[\sin t](s) = \int_0^{+\infty} \sin t\ e^{-st}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{s^2+1}$, per ogni $s > 0$;
- $\mathcal{L}[\cos t](s) = \int_0^{+\infty} \cos t\ e^{-st}\ \mathrm{d}t = \frac{s}{s^2+1}$, per ogni $s > 0$;
- $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{s-a}$, per ogni $s > a$.

Osserviamo che ogni funzione di ordine esponenziale è trasformabile, infatti dato che $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ per qualche $C, \alpha > 0$, allora $|f(t)e^{-st}| \leq Ce^{(\alpha-s)t}$ e quindi l'integrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\ dt$ converge per ogni $s > \alpha$. L'ascissa di convergenza coincide con l'estremo inferiore dei valori di α per cui vale la (2.1) per qualche $C > 0$.

Infine, se f è di ordine esponenziale allora $\lim\limits_{s\to+\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$. Infatti, dato che $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$, allora $|f(t)e^{-st}| \leq Ce^{-(s-\alpha)t}$ per ogni $t \geq 0$; quindi

$$0 \leq |\mathcal{L}[f](s)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}|\ \mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} Ce^{-(s-\alpha)t}\ \mathrm{d}t = \frac{C}{s-\alpha}$$

e l'asserto si ottiene applicando il Teorema dei Carabinieri.

Elenchiamo ora alcune proprietà delle trasformate di Laplace, che sono immediata conseguenza della definizione:

- $\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)](s) = \alpha\mathcal{L}[f(t)](s) + \beta\mathcal{L}[g(t)](s)$ *(linearità)*
- $\mathcal{L}[f(kt)](s) = \frac{1}{k}\mathcal{L}[f(t)](\frac{s}{k})$, per ogni $k > 0$ *(riscalamento)*
- $\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-\alpha)$ *(traslazione)*
- $\mathcal{L}[f(t-t_0)](s) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t)](s)$, per ogni $t_0 > 0$ *(ritardo)*

dove nell'ultima relazione la funzione $f(t-t_0)$ è definita uguale a 0 per $0 \leq t < t_0$.

Ad esempio, applicando la linearità si ottiene

$$\mathcal{L}[\sinh(\omega t)](s) = \mathcal{L}[\frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})](s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{\omega t}](s) - \mathcal{L}[e^{-\omega t}](s)\right) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cosh(\omega t)](s) = \mathcal{L}[\frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})](s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{\omega t}](s) + \mathcal{L}[e^{-\omega t}](s)\right) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-\omega} + \frac{1}{s+\omega}) = \frac{s}{s^2-\omega^2};$$

mentre applicando la proprietà del riscalamento si ottiene

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}[\sin(t)](\frac{s}{\omega}) = \frac{1}{\omega}\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2};$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}[\cos(t)](\frac{s}{\omega}) = \frac{1}{\omega}\frac{s\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Infine, come conseguenza della proprietà della traslazione si ottiene

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}\sin(\omega t)](s) = \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s-\alpha) = \frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2};$$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}\cos(\omega t)](s) = \mathcal{L}[\cos(\omega t)](s-\alpha) = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}.$$

Analizziamo ora le proprietà differenziali della trasformata di Laplace.

Teorema 3.5 *Sia f una funzione di ordine esponenziale, continua su $[0,+\infty)$ e generalmente regolare. Allora f' è trasformabile, con*

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0). \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Dato che f è di ordine esponenziale, esistono $C, \alpha > 0$ tali che $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ per ogni $t \geq 0$. Quindi $\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-st} = 0$ per ogni $s > \alpha$. Pertanto, integrando per parti si ha

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}\ \mathrm{d}t = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\ \mathrm{d}t =$$
$$= \lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-st} - f(0) + s\mathcal{L}[f(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0).$$

□

Osserviamo che se f è di ordine esponenziale, derivabile su $[0,+\infty)$, con f' continua e generalmente regolare, allora applicando ad f' il teorema precedente si ottiene

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0) - f'(0).$$

Più in generale, se f è di classe C^{n-1} su $[0,+\infty)$, con $f^{(n-1)}$ generalmente regolare, allora

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Come conseguenza del Teorema 3.5, determiniamo la trasformata di Laplace della funzione integrale.

Corollario 3.6 *Se f è di ordine esponenziale allora*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\ \mathrm{d}\tau\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)](s).$$

Dimostrazione. Dato che f è di ordine esponenziale, anche la sua funzione integrale $F(t)$ è di ordine esponenziale, quindi trasformabile alla Laplace. Applicando la (3.1) alla funzione integrale $F(t)$, che ha come derivata f, si ottiene

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = s\mathcal{L}[F(t)](s) - F(0)$$

da cui si ottiene la tesi, osservando che $F(0) = 0$.

Vale anche il seguente risultato, che riportiamo senza dimostrazione.

Teorema 3.7 *Se f è di ordine esponenziale allora anche la funzione $t^n f(t)$ lo è e si ha*

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f](s), \quad n \geq 1.$$

Per le funzioni periodiche vale il seguente risultato.

Proposizione 3.8 *Se f è generalmente continua, periodica di periodo T, allora*

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\ \mathrm{d}t}{1-e^{-sT}}, \qquad \textit{per ogni } s > 0.$$

Dimostrazione. La funzione f è limitata, perché è generalmente continua e periodica, quindi è trasformabile. Per definizione si ha

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Ponendo $\tau := t - KT$ si ha

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^T e^{-s(\tau+kT)} f(\tau + kT)\ \mathrm{d}\tau = e^{-skT}\int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau;$$

quindi

$$\mathcal{L}[f](s) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-skT}\int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right) = \left(\int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} = \frac{\int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau}{1-e^{-sT}}.$$

□

Ad esempio, calcoliamo la trasformata della funzione f, periodica di periodo 2, definita da

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [2n, 2n+1) \\ 0 & \text{se } t \in [2n+1, 2n+2) \end{cases} \qquad n \geq 0.$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 f(t)e^{-st}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^1 e^{-st}\ \mathrm{d}t = \frac{-1}{s(1-e^{-2s})}[e^{-st}]_0^1 =$$
$$= \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})} = \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-s})(1+e^{-s})} = \frac{1}{s(1+e^{-s})}.$$

Concludiamo il paragrafo con una tabella delle trasformate di alcuni segnali notevoli.

$f(t) = 1$	$F(s) = \dfrac{1}{s} \quad (s > 0)$
$f(t) = e^{\alpha t}$	$F(s) = \dfrac{1}{s-\alpha} \quad (s > \alpha)$
$f(t) = \sin \omega t$	$F(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad (s > 0)$
$f(t) = \cos \omega t$	$F(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2} \quad (s > 0)$
$f(t) = \sinh \omega t$	$F(s) = \dfrac{\omega}{s^2-\omega^2} \quad (s > \omega)$
$f(t) = \cosh \omega t$	$F(s) = \dfrac{s}{s^2-\omega^2} \quad (s > \omega)$
$f(t) = e^{\alpha t} \sin \omega t$	$F(s) = \dfrac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2} \quad (s > \alpha)$
$f(t) = e^{\alpha t} \cos \omega t$	$F(s) = \dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2} \quad (s > \alpha)$
$f(t) = t^n$	$F(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0)$
$f(t) = t^n e^{\alpha t}$	$F(s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}} \quad (s > \alpha)$
$f(t) = t \sin \omega t$	$F(s) = \dfrac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2} \quad (s > 0)$
$f(t) = t \cos \omega t$	$F(s) = \dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} \quad (s > 0)$

4 Antitrasformata di Laplace

Nel processo di inversione della Trasformata di Laplace è fondamentale il seguente risultato di unicità, che riportiamo senza dimostrazione.

Teorema 4.1 *(di unicità di Lerch). Se f, g sono funzioni di ordine esponenziale, tali che $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$ per ogni s sufficientemente grande, allora $f \approx g$, cioè $f(t) = g(t)$ in ogni intervallo $[a, b]$, eccetto al più in un numero finito di punti.*

Nel Teorema 4.1 in generale non ci si può aspettare l'uguaglianza di f e g in tutti i punti, dato che per il Principio di Invarianza degli integrali, se due funzioni differiscono solo in un numero finito di punti l'integrale non cambia, quindi anche la Trasformata di Laplace è la stessa. Tuttavia nelle applicazioni fisiche e tecnologiche due funzioni equivalenti (cfr. Definizione 1.2) descrivono lo stesso segnale, per cui possiamo definire l'inversa della Trasformata di Laplace, a meno di funzioni equivalenti, nell'ambito delle funzioni di ordine esponenziale.

Definizione 4.2 Data una funzione $F(s)$ definita in $(\sigma, +\infty)$, con $\sigma \geq -\infty$, tale che $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ per qualche funzione f di ordine esponenziale, allora f si chiama **antitrasformata di Laplace** di F e si denota

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = f(t).$$

Dalle proprietà delle trasformate si deducono immediatamente le seguenti proprietà delle antitrasformate.

- $\mathcal{L}^{-1}[\alpha F(s) + \beta G(s)](t) = \alpha \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) + \beta \mathcal{L}^{-1}[G(s)](t)$ *(linearità)*
- $\mathcal{L}^{-1}[F(ks)](t) = \frac{1}{k}\mathcal{L}^{-1}[F(s)](\frac{t}{k})$, per ogni $k > 0$ *(riscalamento)*
- $\mathcal{L}^{-1}[F(s - \alpha)](t) = e^{\alpha t}\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ *(traslazione)*
- $\mathcal{L}^{-1}[e^{-t_0 s}F(s)](t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t - t_0)$ per ogni $t_0 > 0$ *(ritardo)*

dove nell'ultima relazione la funzione $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t-t_0)$ è definita uguale a 0 per $0 \leq t < t_0$.

Per determinare l'antitrasformata di una funzione razionale fratta, preliminarmente è opportuno decomporla nella somma di frazioni più semplici, a ciascuna delle quali applicare le proprietà dell'antitrasformata utilizzando anche la tabella delle trasformate dei segnali notevoli, come negli esempi che seguono.

Esempi.

(4.1) Se $F(s) = \dfrac{1}{as+1}$ allora per la proprietà del riscalamento si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{as+1}\right](t) = \frac{1}{a}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}.$$

(4.2) Se $F(s) = \dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$, allora $F(s) = \dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{s-a} - \dfrac{1}{s-b}\right)$ e

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right](t) = \frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}.$$

(4.3) Se $F(s) = \dfrac{1}{(s-a)^2}$, per la proprietà della traslazione si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right](t) = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t) = te^{at}.$$

(4.4) Se $F(s) = \dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$, allora $F(s) = \dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{a}{s-a} - \dfrac{b}{s-b}\right)$ e

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right](t) = \frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}.$$

(4.5) Se $F(s) = \dfrac{s}{(s-a)^2}$, allora $F(s) = \left(\dfrac{1}{s-a} + \dfrac{a}{(s-a)^2}\right)$ e

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-a)^2}\right](t) = e^{at} + ate^{at} = (1+at)e^{at}.$$

(4.6) Se $F(s) = \dfrac{a+bs}{(s^2+\omega^2)}$, allora $F(s) = \dfrac{a}{\omega}\dfrac{\omega}{(s^2+\omega^2)} + b\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ e

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a+bs}{s^2+\omega^2}\right](t) = \frac{a}{\omega}\sin\omega t + b\cos\omega t.$$

(4.7) Se $F(s) = \dfrac{1}{s^2+bs+c}$, con $\Delta = b^2-4c < 0$, allora $F(s) = \dfrac{1}{(s+\frac{1}{2}b)^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{|\Delta|})^2}$.
Tenendo conto dell'esempio precedente e della proprietà del riscalamento si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+bs+c}\right](t) = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}e^{-\frac{1}{2}bt}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{|\Delta|}t).$$