UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

C.d.L. Triennale in

Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2012/2013

Corso di *Analisi Matematica 2* – 9 CFU

Dr. G. Autuori

Prova scritta del 6 Febbraio 2014

Esercizio 1. *i*) Risolvere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$(\mathrm{PC})_\alpha \quad \begin{cases} z'(x) = \alpha z(x) + 2e^{\alpha x}\cos^2 x, & x \in [0,\infty), \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

ii) Detta z_α la soluzione di $(\mathrm{PC})_\alpha$, provare che $z_\alpha \in L^1(\mathbb{R}_0^+)$ se e solo se $\alpha < 0$. Calcolare infine $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \|z_\alpha\|_{L^1(\mathbb{R}_0^+)}$.

Esercizio 2. Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(5y^2 e^x \left[\sin 2x - \frac{\cos 2x}{5} \right], \frac{2}{5} y e^x \left[3\sin 2x - 11\cos 2x \right] \right).$$

i) Stabilire se F è solenoidale, irrotazionale e/o conservativo nel suo dominio. Determinare inoltre, se esiste, un potenziale per F.

ii) Data la curva γ_a, di equazioni parametriche

$$\gamma_a(t) : \begin{cases} x(t) = (t^2 + a)\sin t, \\ y(t) = 2\cos t + a, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi], \ a \in \mathbb{R},$$

stabilire se essa è semplice, regolare e/o chiusa in $[0,2\pi]$. Infine, calcolare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il lavoro di F lungo γ_a nell'intervallo $[0,\pi]$.

Esercizio 3. Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ da

$$f(x,y) = \begin{cases} [x^2 + (y-1)^2] \arctan\left[(y-1)/|x|\right], & x \neq 0, y \geq 1, \\ \pi/2, & x = 0, \\ 2|x|(|y|-1)\sin|x| + \pi/2, & x \neq 0, y < 1, \end{cases}$$

e il dominio $\Omega = \mathcal{S} \cup \mathcal{B}$, dove $\mathcal{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 0, \ \ y \geq 1\}$ e $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - \sqrt{|x|}, \ \ |x| \leq 1\}$.
Si calcoli $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$.

Esercizio 4. *i*) Sia $f(z) = z^2 e^z$, $z \in \mathbb{C}$. Dimostrare, attraverso le condizioni di Cauchy–Riemann, che f è analitica in $\mathbb{C}$.

ii) Esibire un esempio di una funzione non analitica in $\mathbb{C}$, motivando la scelta.

Risoluzione

Esercizio 1. Parte *i*). L'equazione è del primo ordine lineare. Se $\alpha = 0$ essa si semplifica in $z'(x) = 2\cos^2 x$, da cui

$$z(x) = 2\int \cos^2 x dx + c = x + \sin x \cos x + c.$$

La condizione iniziale implica $c = 0$. Supponiamo ora $\alpha \neq 0$. L'equazione si presenta in forma normale con integrale generale dato da

$$z(x) = e^{-\int(-\alpha)dx}\left\{\int e^{-\int \alpha dx} \cdot 2e^{\alpha x}\cos^2 x dx + c\right\},$$

ossia

$$z(x) = z_\alpha(x) = e^{xy}(x + \sin x \cos x + c).$$

Dalla condizione iniziale, si ricava ancora una volta $c = 0$. In conclusione, fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, l'unica soluzione di $(\mathrm{PC})_\alpha$ è

$$z_\alpha(x) = e^{\alpha x}(x + \sin x \cos x), \quad x \in [0, \infty).$$

Parte *ii*). Stabilire se $z_\alpha \in L^1(\mathbb{R}_0^+)$ equivale a stabilire se l'integrale

$$\|z_\alpha\|_{L^1(\mathbb{R}_0^+)} = \int_0^\infty z_\alpha(x)dx = \int_0^\infty e^{\alpha x}(x + \sin x \cos x)dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

sia convergente oppure no. Se $\alpha = 0$ si ha

$$\int_0^\infty (x + \sin x \cos x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{\cos 2x}{4}\right]_0^\infty.$$

Poiché $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ non esiste, l'ultimo integrale scritto non ha senso.

Sia dunque $\alpha \neq 0$. Si ha

$$\|z_\alpha\|_{L^1(\mathbb{R}_0^+)} = \mathscr{L}[x + \sin x \cos x](-\alpha),$$

dove con $\mathscr{L}[f(x)](s)$ denotiamo la trasformata di Laplace della funzione $f(x)$, valutata in s. Per le proprietà della trasformata si ha

$$\|z_\alpha\|_{L^1(\mathbb{R}_0^+)} = \mathscr{L}[x](-\alpha) + \frac{1}{2}\mathscr{L}[\sin 2x](-\alpha) = \int_0^\infty x e^{\alpha x}dx + \frac{1}{\alpha^2 + 4}.$$

Ora

$$\int_0^\infty x e^{\alpha x}dx = \left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\right]_0^\infty = \begin{cases} \infty, & \alpha > 0, \\ \dfrac{1}{\alpha^2}, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Pertanto $z_\alpha \in L^1(\mathbb{R}_0^+)$ se e solo se $\alpha < 0$, con

$$\|z_\alpha\|_{L^1(\mathbb{R}_0^+)} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2 + 4} \to 0, \quad \text{per } \alpha \to -\infty.$$

Esercizio 2. Parte i). Chiaramente il campo assegnato è ben definito e di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Posto $F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ si ha

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = y^2 e^x (7\sin 2x + 9\cos 2x), \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{2}{5} e^x (3\sin 2x - 11\cos 2x),$$

e pertanto F non è solenoidale in $\mathbb{R}^2$. D'altra parte F è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$, e dunque conservativo, essendo

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2ye^x(5\sin 2x - \cos 2x) = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Detto $U(x,y)$ un potenziale per F, deve essere

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 5y^2 e^x \left[\sin 2x - \frac{\cos 2x}{5}\right],$$

ossia

$$U(x,y) = 5y^2 \int e^x \sin 2x dx - y^2 \int e^x \cos 2x dx + k(y).$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\int e^x \sin 2x dx &= e^x \sin 2x - \int 2e^x \cos 2x dx \\ &= e^x \sin 2x - 2\left\{e^x \cos 2x + 2\int e^2 \sin 2x dx\right\} \\ &= e^x \sin 2x - 2e^x \cos -42x \int e^x \sin 2x dx,\end{aligned}$$

da cui $\int e^x \sin 2x dx = \frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x)$. Inoltre

$$\begin{aligned}\int e^x \cos 2x dx &= e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx \\ &= e^x \cos 2x + \frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x) \\ &= \frac{e^x}{5}(2\sin 2x + \cos 2x).\end{aligned}$$

Quindi

$$U(x,y) = \frac{y^2 e^x}{5}(3\sin 2x - 11\cos 2x) + k(y).$$

D'altra parte, imponendo $\dfrac{\partial U}{\partial y} = f_2$, si ricava

$$\frac{2}{5} y e^x (3\sin 2x - 11\cos 2x) + k'(y) = \frac{2}{5} y e^x (3\sin 2x - 11\cos 2x)$$
$$\Downarrow$$
$$k(y) \equiv k \in \mathbb{R}.$$

In conclusione

$$U(x,y) = \frac{y^2 e^x}{5}(3\sin 2x - 11\cos 2x) + k.$$

Parte ii). Per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$, la curva γ_a è semplice, regolare e chiusa in $[0, 2\pi]$.

Per studiare la semplicità ci si può limitare alla sola coordinata y e osservare che $y(t_1) = y(t_2)$ se e solo se $t_1 = t_2 \in (0, 2\pi)$ oppure $t_1 = t_2 = 0, 2\pi$. Dunque la curva è semplice per ogni $a \in \mathbb{R}$.

D'altra parte, per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $t \in [0, 2\pi]$

$$x'(t) = 2t\sin t + (t^2 + a)\cos t, \quad y'(t) = -2\sin t$$
$$|\gamma_a'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Ora, fissati t e a, risulta

$$x'(t)^2 = (2t\sin t + (t^2 + a)\cos t)^2 \quad \text{e} \quad y'(t)^2 = 4\sin^2 t.$$

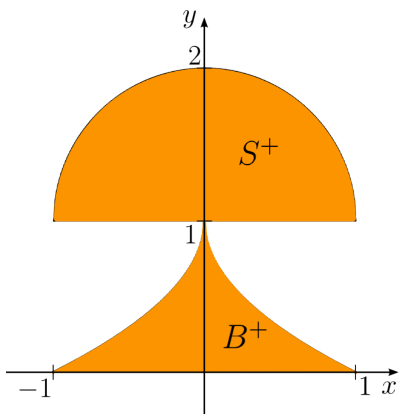
Chiaramente $y'(t)^2 = 0$ se e solo se $t = 0$, π oppure 2π. D'altra parte in $t = 0$ oppure $t = 2\pi$ si ha $x'(0)^2 = a^2$, da cui $|\gamma_a'(0)| = |a|$; mentre, per $t = \pi$, risulta $x'(0)^2 = (\pi^2 + a)^2$ e dunque $|\gamma_a'(\pi)| = |\pi^2 + a|$.

Di conseguenza, se $a \in \mathbb{R} \setminus \{-\pi^2, 0\}$, la curva γ_a è regolare in $[0, 2\pi]$; invece, se $a = 0$ la curva perde regolarità in $t = 0$ e $t = 2\pi$; infine, se $a = -\pi^2$, allora la curva perde regolarità in $t = \pi$.

Inoltre $\gamma_a(0) = (0, 2 + a) = \gamma_a(2\pi)$, ossia γ_a è chiusa per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Infine, il lavoro richiesto si determina facilmente attraverso il potenziale U, essendo F conservativo. Posto $P = (x(0), y(0)) = (0, 2 + a)$ e $Q = (x(\pi), y(\pi)) = (0, -2 + a)$, tale lavoro vale $U(Q) - U(P) = 88a/5$.

Esercizio 3. Chiaramente conviene spezzare l'integrale in due parti, considerando i due domini $\mathcal{B}$ e $\mathcal{S}$.



Poniamo $\mathcal{B}^+ = \mathcal{B} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0\}$ e $\mathcal{B}^- = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}^+$. Analogamente $\mathcal{S}^+ = \mathcal{S} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0\}$ e $\mathcal{S}^- = \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^+$. Data la parità di f, l'integrale richiesto si ottiene dalla formula

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = 2\left\{\iint_{\mathcal{B}^+} f(x,y)\,dxdy + \iint_{\mathcal{S}^+} f(x,y)\,dxdy\right\}.$$

Riscriviamo $\mathcal{B}^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq 1 - \sqrt{x}\}$. Si ha

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{B}^+} f(x,y)\,dxdy &= \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{x}} \left[2x(y-1)\sin x + \frac{\pi}{2}\right] dydx \\
&= \int_0^1 \left[x(y-1)^2 \sin x + \frac{\pi}{2} y\right]_0^{1-\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^1 \left\{x^2 \sin x + \frac{\pi}{2}(1-\sqrt{x}) - x\sin x\right\} dx.
\end{aligned}$$

Integrando per parti, si vede che

$$\int x^2 \sin x dx = (2-x^2)\cos x + 2x \sin x, \qquad \int x \sin x dx = \sin x - x\cos x,$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{B}^+} f(x,y)\,dxdy &= \int_0^1 x^2 \sin x, dx - \int_0^1 x \sin x\, dx + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\int_0^1 \sqrt{x} dx \\
&= \left[(2 - x^2 + x)\cos x + (2x-1)\sin x - \frac{\pi}{3} x\sqrt{x}\right]_0^1 + \frac{\pi}{2} \\
&= 2\cos 1 + \sin 1 + \frac{\pi - 12}{6}.
\end{aligned}$$

Riscriviamo $\mathcal{S}^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 1 + \sqrt{1-x^2}\}$.
Per integrare su $\mathcal{S}^+$ è conveniente utilizzare le coordinate polari

$$\begin{cases} x(\varrho,\vartheta) = \varrho\cos\vartheta, \\ y(\varrho,\vartheta) = 1 + \varrho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad (\varrho,\vartheta) \in [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \ |\det J| = 1.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}^+} f(x,y)dxdy &= \iint_{\mathcal{S}^+} \left\{ [x^2 + (y-1)^2] \arctan\left(\frac{y-1}{x}\right) \right\} dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \varrho^3 \vartheta d\vartheta d\varrho = \int_0^1 \varrho^3 d\varrho \cdot \int_0^{\pi/2} \vartheta d\vartheta = \frac{\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \iint_\Omega f(x,y)dxdy &= 2\left(2\cos 1 + \sin 1 + \frac{\pi - 12}{6} + \frac{\pi^2}{32}\right) \\ &= 2\left(2\cos 1 + \sin 1 + \frac{3\pi^2 + 16\pi - 192}{96}\right). \end{aligned}$$

Esercizio 4. Parte i). Determiniamo innanzitutto la parte reale e quella immaginaria di f. Ponendo $z = x + iy$ si ha

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+iy)^2 e^{x+iy} = e^x(x^2 - y^2 + 2ixy) \cdot (\cos y + i\sin y) \\ &= u(x,u) + iv(x,y), \end{aligned}$$

dove

$$u(x,y) = e^x[(x^2 - y^2)\cos y - 2xy\sin y]$$

e

$$v(x,y) = e^x[(x^2 - y^2)\sin y + 2xy\cos y].$$

Osserviamo che u e v sono funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, il chè implica che f è $\mathbb{R}$–differenziabile in $\mathbb{C}$. Studiamo le condizioni di Cauchy–Riemann.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x[(x^2 + 2x - y^2)\cos y - 2y(1+x)\sin y] = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x[2y(1+x)\cos y + (x^2 + 2x - y^2)\sin y] = -\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

La validità delle condizioni di C–R, unita alla $\mathbb{R}$–differenziabilità di f, assicura la $\mathbb{C}$–differenziabilità di f. Pertanto f è olomorfa e dunque analitica in $\mathbb{C}$.

Parte ii). Un esempio di funzione non analitica in $\mathbb{C}$ potrebbe essere $f(z) = f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{x+iy}$, in quanto essa si annulla in tutti i punti delle rette $y = \pm x$ del piano, quando invece si sa che una funziona analitica ammette solo zeri isolati.