UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

C.d.L. Triennale in
Ingegneria Informatica e dell'Automazione
A.A. 2012/2013

Corso di *Analisi Matematica 2* – 9 CFU
Dr. G. Autuori

Prova scritta del 15 Gennaio 2014

Esercizio 1. Stabilire se il seguente problema di Cauchy ammette soluzione.

$$\text{(PC)} \qquad \begin{cases} x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = 4e^{3t}\sin 2t, \\ x(0) = 0,\ x'(0) = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

In caso affermativo determinarla e discuterne l'unicità.

Esercizio 2. Calcolare

$$I = \iint_D \frac{|x|}{(x^2+2y^2)^{3/2}} \arctan^2\left(\frac{\sqrt{2}y}{x}\right) dxdy,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, 2 < x^2 + 2y^2 < 4,\, xy > 0\}$.

Esercizio 3. Calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}\cos t}{2+\cos t} dt.$$

Esercizio 4. $i)$ Determinare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{a^2(1+x^2)}, \quad a > 0;$$

$ii)$ usare la parte $i)$ per dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} e^{-|x|} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Risoluzione

Esercizio 1. Il problema assegnato ammette unica soluzione. Infatti esso è governato da un'equazione lineare a coefficienti costanti, e il termine noto $b(t) = 4e^{3t}\sin 2t$ è una funzione infinitamente differenziabile in tutto $\mathbb{R}$.

Determinamo prima l'integrale generale S_0 dell'equazione omogenea associata, attraverso l'equazione caratteristica, che è $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$. Tale equazione ammette due soluzioni reali e distinte $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$. Pertanto

$$S_0 = \left\{c_1e^t + c_2e^{4t},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ora, attraverso il metodo della somiglianza, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$y(t) = e^{3t}\left[k_1\cos 2t + k_2\sin 2t\right],$$

dove k_1 e k_2 sono costanti reali da determinare. Si ha

$$y'(t) = e^{3t}\left[(3k_1 + 2k_2)\cos 2t + (3k_2 - 2k_1)\sin 2t\right]$$

e

$$y''(t) = e^{3t}\left[(5k_1 + 12k_2)\cos 2t + (5k_2 - 12k_1)\sin 2t\right].$$

Sostituendo $y(t)$, $y'(t)$ e $y''(t)$ nell'equazione completa si trova

$$\begin{cases} 3k_1 - k_2 = 0, \\ k_1 + 3k_2 = -2, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad k_1 = -\frac{1}{5} \ \text{ e } \ k_2 = -\frac{3}{5}.$$

Dunque

$$y(t) = -e^{3t}\left\{\frac{1}{5}\cos 2t + \frac{3}{5}\sin 2t\right\}.$$

Di conseguenza, l'integrale generale S dell'equazione copleta è

$$S = \left\{c_1e^t + c_2e^{4t} - e^{3t}\left[\frac{1}{5}\cos 2t + \frac{3}{5}\sin 2t\right],\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Rimane da determinare l'unica soluzione di (PC). Posto

$$x(t) = c_1e^t + c_2e^{4t} - e^{3t}\left\{\frac{1}{5}\cos 2t + \frac{3}{5}\sin 2t\right\},$$

si ha

$$x'(t) = c_1e^t + 4c_2e^{4t} - e^{3t}\left\{\frac{9}{5}\cos 2t + \frac{7}{5}\sin 2t\right\}.$$

Imponendo le condizioni iniziali risulta

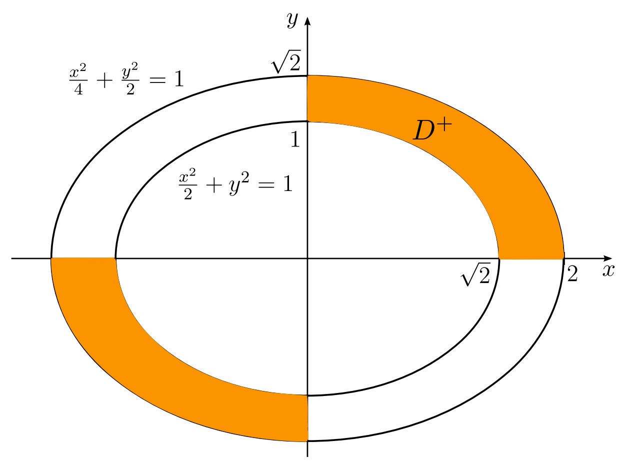
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \dfrac{1}{5}, \\ c_1 + 4c_2 = 2, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = -\frac{2}{5} \ \text{ e } \ c_2 = \frac{3}{5}.$$

In conclusione, l'unica soluzione di (PC) è

$$x(t) = -\frac{2}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{4t} - e^{3t}\left\{\frac{1}{5}\cos 2t + \frac{3}{5}\sin 2t\right\}.$$

Esercizio 2. Osserviamo che l'integranda $f(x,y) = \dfrac{|x|\arctan^2(\sqrt{2}y/x)}{(x^2+2y^2)^{3/2}}$ è una funzione simmetrica rispetto all'origine, così come il dominio di integrazione, il quale si può riscrivere nella forma

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}<1,\ \frac{x^2}{2}+y^2>1,\ xy>0\right\}.$$



Le proprietà di simmetria di f e D suggeriscono l'utilizzo delle coordinate ellittiche polari

$$\begin{cases} x = 2\varrho\cos\vartheta, \\ y = \sqrt{2}\varrho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \varrho = \sqrt{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}} \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \\ \vartheta = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{2}y}{x}\right) \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

con $|\det J| = 2\sqrt{2}\varrho$. Pertanto

$$\begin{aligned} I &= 2\iint_{D^+} f(\varrho,\vartheta)|\det J|\,d\varrho d\vartheta = 2\int_0^{\pi/2}\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{2\varrho\cos\vartheta}{8\varrho^3}\,\vartheta^2\cdot 2\sqrt{2}\varrho\,d\varrho d\vartheta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\vartheta^2\cos\vartheta d\vartheta\int_{\sqrt{2}/2}^1\frac{d\varrho}{\varrho} = \sqrt{2}\,[\log\varrho]_{\sqrt{2}/2}^1\int_0^{\pi/2}\vartheta^2\cos\vartheta d\vartheta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\log 2\int_0^{\pi/2}\vartheta^2\cos\vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \vartheta^2 \cos\vartheta d\vartheta &= \left[\vartheta^2 \sin\vartheta\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\vartheta \sin\vartheta d\vartheta \\ &= \frac{\pi^2}{4} + 2\left\{ [\vartheta\cos\vartheta]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta d\vartheta \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2\,[\sin\vartheta]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} - 2.\end{aligned}$$

In definitiva

$$I = \frac{\sqrt{2}(\pi^2 - 8)}{8} \log 2.$$

Esercizio 3. Utilizziamo la formulazione complessa e il Teorema dei residui. Poniamo $z = e^{it}$ da cui $dz = izdt$. Per le formule di Eulero si ha $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$. Pertanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}\cos t}{2 + \cos t} dt = \int_\gamma \frac{z^2 + 1}{i(z^2 + 4z + 1)} dz,$$

dove γ è il bordo del disco unitario in $\mathbb{R}^2$. La funzione integranda $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{i(z^2 + 4z + 1)}$ presenta due singolarità isolate in $z_1 = -2 - \sqrt{3}$ e $z_2 = -2 + \sqrt{3}$. Tali singolarità sono poli semplici per f e solo z_2 è contenuto all'interno di γ. Dunque, per il Teorema dei residui

$$\int_\gamma \frac{z^2 + 1}{i(z^2 + 4z + 1)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_2).$$

Si ha

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) = \lim_{z \to z_2} \frac{z^2 + 1}{i(z - z_1)} = \frac{z_2^2 + 1}{i(z_2 - z_1)} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}.$$

In conclusione

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}\cos t}{2 + \cos t} dt = 2\pi i \cdot \frac{4 - 2\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} = \frac{4\pi(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$

Esercizio 4. Parte i). Osserviamo che $f(x) = \dfrac{1}{a^2(1 + x^2)} = g(ax)$, dove $g(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$. Sappiamo che la trasformata di Fourier di g è

$\hat{g}(w) = \dfrac{\pi}{a}\, e^{-a|w|}$ e dunque, sfruttando la proprietà di omotetia della trasformata, si ha

$$\hat{f}(w) = \frac{\pi}{a^2}\, e^{-|w|}.$$

Parte *ii*). Si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\, e^{-|x|} dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{2\sin x}{x}\, e^{-|x|} dx = \frac{a^2}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{2\sin x}{x} \cdot \frac{\pi}{a^2}\, e^{-|x|} dx.$$

Osserviamo ora che

$$\frac{2\sin x}{x} = \hat{p}_1(x), \quad \text{dove } p_1(x) = \chi_{[-1,1]}(x).$$

Pertanto, in virtù della parte *i*) e applicando il lemma che mette in relazione l'integrale del prodotto di due funzioni con quello del prodotto delle rispettive trasformate di Fourier, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\, e^{-|x|} dx &= \frac{a^2}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{p}_1(x)\hat{f}(x) dx = 2\pi \cdot \frac{a^2}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} p_1(x) f(x) dx \\ &= a^2 \int_{-1}^{1} f(x) dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx = [\arctan x]_{-1}^{1} \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$