UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

C.d.L. Triennale in
Ingegneria Informatica e dell'Automazione
A.A. 2012/2013

Corso di *Analisi Matematica 2* – 9 CFU
Dr. G. Autuori

Prova scritta del 10 Luglio 2013

Esercizio 1. Dato il seguente probelma di Cauchy, stabilire se esso ammette soluzione e se tale soluzione è unica. In caso affermativo dire dove è definita e determinarla.

$$\text{(PC)} \qquad \begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + (\pi^2+1)x(t) = (\pi^4+4)\cos t, \\ x(0) = \pi^2, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia assegnato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(xy \left[2\log\frac{x}{z} + 1 \right], \, x^2 \log\frac{x}{z}, \, -\frac{x^2 y}{z} \right).$$

a) Stabilire se esso è conservativo nel suo dominio, ed eventualmente determinarne un potenziale.

b) Calcolare il lavoro di F lungo la curva γ_α di parametrizzazione

$$\varphi_\alpha(t) = ((1-e)t + e, \, e^{-1} - (e^{-1} - \alpha)t, \, 1) \quad t \in [0,1],$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Determinare il valore del seguente integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 2x}{x^2 - 6x + 25} \, dx.$$

Esercizio 4. Determinare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \int_4^\infty (x-s) e^{-ix|x-s|} ds.$$

Risoluzione

Esercizio 1. L'equazione in (PC) è lineare del secondo ordine non omogenea. Consideriamo innanzitutto l'equazione omogenea associata

$$x''(t) - 2x'(t) + (\pi^2 + 1)x(t) = 0.$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + \pi^2 + 1 = 0$ che ammette due radici complesse coniugate $\lambda = 1 \mp i\pi$. Dunque l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$x(t) = e^t(k_1 \cos t + k_2 \sin t), \quad k_1,\, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Occorre ora determinare una soluzione particolare $y(t)$ dell'equazione assegnata. Utilizziamo il metodo della somiglianza. Considerando che il termine noto è della forma $b(t) = (\pi^4 + 4)\cos t$, cercheremo una soluzione particolare del tipo

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \cos t.$$

Derivando si ottiene

$$y'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t, \qquad y''(t) = -y(t),$$

e sostituendo in (PC) si arriva al sistema

$$\begin{cases} \pi^2 c_1 - 2c_2 = \pi^4 + 4, \\ 2c_1 + \pi^2 c_2 = 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = \pi^2, \\ c_2 = -2. \end{cases}$$

Dunque $y(t) = \pi^2 \cos t - 2 \sin t$.

L'integrale generale dell'equazione completa in (PC) si ottiene sommando l'integrale generale dell'equazione omogenea associata con la soluzione particolare trovata, ossia esso è

$$X(t) = x(t) + y(t) = e^t(k_1 \cos t + k_2 \sin t) + \pi^2 \cos t - 2 \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La soluzione dunque esiste in $\mathbb{R}$ e per il Teorema di Cauchy essa è anche unica. Per determinare il valore delle costanti k_1 e k_2 usiamo l'espressione di $X(t)$, $X'(t)$ e le condizioni iniziali. Essendo

$$X'(t) = e^t[(k_1 + \pi k_2)\cos \pi t + (k_2 - \pi k_1)\sin \pi t] - \pi^2 \sin t - 2\cos t,$$

si trova

$$\begin{cases} X(0) = k_1 + \pi^2, \\ X'(0) = k_1 + \pi k_2 - 2, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} k_1 + \pi^2 = \pi^2, \\ {}_1 + \pi k_2 - 2 = 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} k_1 = 0, \\ k_2 = \dfrac{2}{\pi}. \end{cases}$$

In conclusione, l'unica soluzione di (PC) è

$$X(t) = \frac{2}{\pi} e^t \sin \pi t + \pi^2 \cos t - 2 \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2. Parte *a*). Il campo F è almeno di calsse C^1 nel suo dominio $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, xz > 0.\}$ Per capire se F è conservativo calcoliamo le sue derivate parziali. Ponendo $F = (F_1, F_2, F_3)$, si ha per ogni terna $(x,y,z) \in \Omega$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x\left[2\log\frac{x}{z} + 1\right] = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = -\frac{2xy}{z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -\frac{x^2}{z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Dunque il campo è conservativo in Ω e di consequenza esiste un potenziae $U \in C^2(\Omega)$ tale che $\nabla U = F$. Chiaramete U può essere determinato a questo stadio solo a meno di una cosante additiva, attraverso un processo di integrazione. Precisamente

$$U(x,y,z) = \int F_2(x,y,z)dy = \int x^2 \log\frac{x}{z}dy + c(x,z) = x^2 y \log\frac{x}{z} + c(x,z).$$

Conseguentemente, dovendo essere $\dfrac{\partial U}{\partial z} = F_3$, va imposto che

$$-\frac{x^2 y}{z} + \frac{\partial c}{\partial z} = -\frac{x^2 y}{z} \;\Rightarrow\; c = c(x),$$

e duque $U(x,y,z) = x^2 y \log\dfrac{x}{z} + c(x)$. Infine poniamo

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \;\Leftrightarrow\; xy\left[2\log\frac{x}{z} + 1\right] + c'(x) = xy\left[2\log\frac{x}{z} + 1\right],$$

ossia $c \equiv$ const. in $\mathbb{R}$ e dunque $U(x,y,z) = x^2 y \log\dfrac{x}{z} + c$.

Parte *b*). Innanzitutto verifichiamo che la curva asseganta sia regolare. Banalmente tutte le sue coponenti sono di classe $C^1([0,1])$ e $\varphi_\alpha'(t) = (1-e, \alpha - e^{-1}, 0) \neq (0,0,0)$ per ogni $t \in [0,1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ora, essendo il campo conservativo, il lavoro effettuato da F lungo φ_α dipende solo dagli estremi iniziali e finali della parametrizzazione, ossia $P_\alpha = \varphi_\alpha(0) = (e, e^{-1}, 1)$ e $Q_\alpha = \varphi_\alpha(1) = (1, \alpha, 1)$. In conclusione

$$\int_{\gamma_\alpha} F \cdot d\varphi_\alpha = U(Q_\alpha) - U(P_\alpha) = -e \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3. La funzione integranda, come funzione di variabile complessa, può essere riscritta nella forma $f(z) = g_1(z) + g_2(z)$, dove

$$g_1(z) = \frac{e^{2iz}}{2(z^2 - 6z + 25)} \quad \text{e} \quad g_2(z) = \frac{e^{-2iz}}{2(z^2 - 6z + 25)}.$$

Chiaramente, indicato con $\mathcal{S}(f)$ l'insieme delle singolarità di f, con ovvio significato di simboli si ha

$$\mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(g_1) \cup \mathcal{S}(g_2) = \{z_1, z_2\},$$

dove $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 3 - 4i$ sono gli zeri del polinomio $z^2 - 6z + 25$. Tali singolarità sono poli semplici per f, che ricadono nei semipiani $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ e $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z < 0\}$, rispettivamente.

Dunque, per il Lemma di Jordan

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 2x}{x^2 - 6x + 25}\, dx &= \int_{\mathbb{R}} g_1(x) dx + \int_{\mathbb{R}} g_2(x) dx \\ &= 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}(g_1, z_1) + \mathrm{Res}(g_2, z_2) \right\}.\end{aligned}$$

Essendo poli semplici si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(g_1, z_1) &= \lim_{z \to z_1} (z - z_1) g_1(z) = \frac{e^{2iz_1}}{2(z_1 - z_2)} = \frac{e^{2iz_1}}{16i}, \\ \mathrm{Res}(g_2, z_2) &= \lim_{z \to z_2} (z - z_2) g_2(z) = \frac{e^{-2iz_2}}{2(z_2 - z_1)} = -\frac{e^{-2iz_2}}{16i}.\end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 2x}{x^2 - 6x + 25}\, dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{6i-8} + e^{-6i-8}}{2} = \frac{\pi e^{-8} \cos 6}{4}.$$

Esercizio 4. La funzione f può essere riscritta come prodotto di convoluzione delle due funzioni

$$f_1(x) = u(x-4)e^{ix} = \begin{cases} e^{ix}, & x > 4 \\ 0, & x \leq 4, \end{cases} \quad \text{e} \quad f_2(x) = xe^{-|x|}.$$

Infatti

$$f(x) = \int_4^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(x - s) dx = (f_1 * f_2)(x),$$

e dunque per determinare la sua trasformata di Fourier basta calcolare le trasformate di Fourier di f_1 e f_2. Con ovvio significato di simboli, si ha per definizione

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(w) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-iwx} u(x-4) e^{ix} dx = \int_4^{\infty} e^{-i(w-1)x} dx \\ &= \left[\frac{e^{-i(w-1)x}}{-i(w-1)} \right]_4^{\infty} = \frac{e^{-4i(w-1)}}{i(w-1)}.\end{aligned}$$

D'altra parte, per le proprietà di derivazione della trasformata di Fourier

$$\hat{f}_2(w) = \mathscr{F}\left[xe^{-|x|}\right](w) = i\frac{d}{dw}\mathscr{F}\left[e^{-|x|}\right](w) = i\frac{d}{dw}\left(\frac{2}{1+w^2}\right)$$
$$= \frac{-4iw}{(1+w^2)^2}.$$

In definitiva

$$\hat{f}(w) = \hat{f}_1(w)\cdot\hat{f}_2(w) = \frac{4we^{4i(1-w)}}{(1-w)(1+w^2)^2}.$$