UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

C.d.L. Triennale in
Ingegneria Biomedica
A.A. 2013/2014

Corso di *Analisi Matematica 2* – 6 CFU
Dr. G. Autuori

Prova scritta del 26 Giugno 2014

Esercizio 1. Data la funzione definita in $\mathbb{R}_0^+$ da

$$f(t)=\begin{cases}(t-3n)^2, & t\in[3n,3n+1),\\ 1, & t\in[3n+1,3n+2)\,,\\ 3(n+1)-t, & t\in[3n+2,3(n+1))\,,\end{cases}\qquad n\in\mathbb{N}_0^+,$$

determinare la trasformata di Laplace di f.

Esercizio 2. Dati $a>0$ e $b>0$, si consideri la funzione

$$f(x,y,z)=(1-z^2)z-\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\right].$$

a) Trovare i punti critici di f e classificarli, al variare di a, $b>0$;
b) siano $\Gamma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ f(x,y,z)=0,\ z>-1/2\}$ e V il solido in $\mathbb{R}^3$ racchiuso da Γ. Calcolare

$$\iiint_V \frac{(x+y^2)\sin z}{z^2(1-z^2)}\,dxdydz.$$

Esercizio 3. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la curva γ giacente sulla superficie di equazione $z=x^2+y^2$, la cui proiezione nel piano xy ha equazione polare $\varrho=1+\vartheta$, $\vartheta\in[0,2\pi]$.

a) Stabilire se γ è semplice, chiusa, regolare;

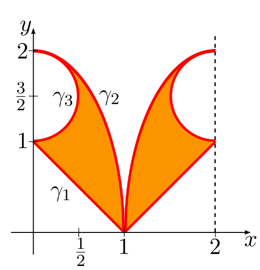
b) calcolare il versore normale principale di γ al variare di $\vartheta\in[0,2\pi]$, e la curvatura di γ per $\vartheta=0$;

c) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma f$, dove $f(x,y,z)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{1+5z}}$.

Esercizio 4. Calcolare

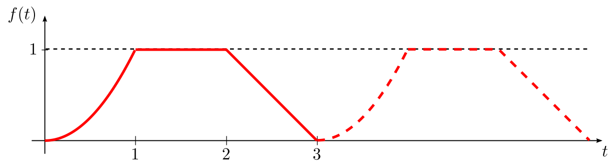
$$\iint_D (3|x-1|+2y)\,dxdy,$$

ove D è l'insieme rappresentato in figura, sapendo che le curve γ_2 e γ_3 sono un ramo di ellisse e una semicirconferenza, rispettivamente.



Risoluzione

Esercizio 1. La funzione assegnata è periodica di periodo $T = 3$.



Pertanto,

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{1-e^{-3s}} \int_0^3 f(t)e^{-st}dt, \quad s > 0,$$

dove

$$\int_0^3 f(t)e^{-st}dt = \int_0^1 t^2 e^{-st}dt + \int_1^2 e^{-st}dt + \int_2^3 (3-t)e^{-st}dt.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^2 e^{-st}dt &= \left[\frac{t^2 e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t=1} + \frac{2}{s}\int_0^1 te^{-st}dt \\
&= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{2}{s}\left\{\left[\frac{te^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t=1} + \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}dt\right\} \\
&= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{2}{s}\left\{\frac{e^{-s}}{-s} - \frac{1}{s^2}[e^{-st}]_{t=0}^{t=1}\right\} \\
&= -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{2e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^3} + \frac{2}{s^3}.
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\int_1^2 e^{-st}dt = -\frac{1}{s}[e^{-st}]_{t=1}^{t=2} = -\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s}.$$

Infine

$$\begin{aligned}
\int_2^3 (3-t)e^{-st}dt &= 3\int_2^3 e^{-st}dt - \int_2^3 te^{-st}dt \\
&= -\frac{3}{s}[e^{-st}]_{t=2}^{t=3} + \frac{1}{s}[te^{-st}]_{t=2}^{t=3} - \frac{1}{s}\int_2^3 e^{-st}dt \\
&= -\frac{3}{s}(e^{-3s} - e^{-2s}) + \frac{1}{s}(3e^{-3s} - 2e^{-2s}) + \frac{1}{s^2}[e^{-st}]_{t=2}^{t=3} \\
&= \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2}.
\end{aligned}$$

In definitiva

$$\int_0^3 f(t)e^{-st}dt = \frac{se^{-3s} - se^{-2s} - 2(1+s)e^{-s} + 2}{s^3}$$

e dunque per ogni $s > 0$ si trova

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s) &= \frac{se^{-3s} - se^{-2s} - 2(1+s)e^{-s} + 2}{(1-e^{-3s})s^3} \\ &= \frac{s - se^{s} - 2(1+s)e^{2s} + 2e^{3s}}{s^3(e^{3s}-1)}.\end{aligned}$$

Esercizio 2. Parte a). Per ogni $a > 0$ e $b > 0$, la funzione f è evidentemente almeno di classe C^2 in tutto $\mathbb{R}^3$, essendo composizione di funzioni con regolarità almeno C^2, e il suo gradiente in un generico punto di $\mathbb{R}^3$ è

$$\nabla f(x,y,z)) \left(-\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2}, 1-3z^2\right).$$

Pertanto, indipendentemente da a e b, gli unici punti critici di f sono $P_1 = (0,0,\sqrt{3}/3)$ e $P_2 = (0,0,-\sqrt{3}/3)$. La matrice hessiana di f è

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -6z \end{pmatrix}$$

e dunque, per la condizone sufficiente, si vede subito che P_1 è un punto di massimo assoluto per f, mentre P_2 è una sella.

Parte b). L'insieme V può essere così descritto

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \le (1-z^2)z,\ z > -\frac{1}{2}\right\}.$$

Ora, $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \ge 0$ per ogni a, $b > 0$. Ciò forza $(1-z^2)z \ge 0$ e dunque $z \le -1$ oppure $z \in [0,1]$. Ne consegue che

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \le (1-z^2)z,\ z \in (0,1)\right\} \cup V_0,$$

dove $V_0 = \{(0,0,0),(0,0,1)\}$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^3$ e non da$'$ contributo nell'integrale richiesto. Pertanto, fissato $z \in (0,1)$, si vede che la sezione del solido parallela al piano xy a quota z è un'ellisse centrata in $(0,0)$ e di semiassi $\alpha = a\sqrt{(1-z^2)z} > 0$ e $\beta = b\sqrt{(1-z^2)z} > 0$. Ciò suggerisce l'integrazione per strati e l'uso delle coordinate ellittiche. Posto

$$D(z) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 \le 1\right\}, \quad z \in (0,1),$$

si ha

$$\iiint_V \frac{(x+y^2)\sin z}{z^2(1-z^2)}\,dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{D(z)} \frac{(x+y^2)\sin z}{z^2(1-z^2)}\,dxdy\right) dz$$
$$= \int_0^1 \frac{\sin z}{z^2(1-z^2)} \left(\iint_{D(z)} (x+y^2)\,dxdy\right) dz.$$

In coordinate ellittiche si ha

$$\begin{cases} x = \alpha\varrho\cos\vartheta, \\ y = \beta\varrho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \varrho \in [0,1],\ \ \vartheta \in [0, 2\pi],\ \ |\mathrm{det}J| = \alpha\beta\varrho.$$

Pertanto, fissato $z \in (0,1)$ si trova

$$\iint_{D(z)} (x+y^2)\,dxdy$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\alpha\varrho\cos\vartheta + \beta^2\varrho^2\sin^2\vartheta)\alpha\beta\varrho\,d\vartheta d\varrho$$
$$= \alpha\beta\left\{\alpha\int_0^1 \varrho^2 d\varrho \int_0^{2\pi}\cos\vartheta\,d\vartheta + \beta^2\int_0^1 \varrho^3 d\varrho\int_0^{2\pi}\sin^2\vartheta\,d\vartheta\right\}$$
$$= \alpha\beta\left\{\frac{\alpha}{3}[\sin\vartheta]_0^{2\pi} + \frac{\beta^2}{8}[\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta]_0^{2\pi}\right\}$$
$$= \frac{\alpha\beta^3\pi}{4} = \frac{ab^3\pi}{4}[z(1-z^2)]^2.$$

In conclusione

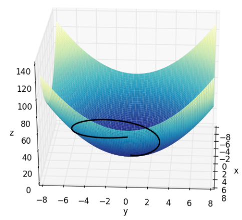
$$\iiint_V \frac{(x+y^2)\sin z}{z^2(1-z^2)}\,dxdydz$$
$$= \frac{ab^3\pi}{4}\int_0^1 [z(1-z^2)]^2 \cdot \frac{\sin z}{z^2(1-z^2)}\,dz$$
$$= \frac{ab^3\pi}{4}\int_0^1 (1-z^2)\sin z\,dz = \frac{ab^3\pi}{4}\left\{[-\cos z]_0^1 - \int_0^1 z^2\sin z\,dz\right\}$$
$$= \frac{ab^3\pi}{4}\left\{[-\cos z]_0^1 - [(2-z^2)\cos z + 2z\sin z]_0^1\right\}$$
$$= \frac{ab^3\pi}{4}[3 - 2(\sin 1 + \cos 1)].$$

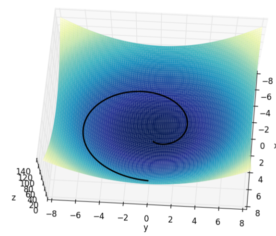
Esercizio 3. La curva γ si può rappresentare in forma parametrica nel modo seguente

$$\varphi : \begin{cases} x(\vartheta) = (1+\vartheta)\cos\vartheta, \\ y(\vartheta) = (1+\vartheta)\sin\vartheta, \\ z(\vartheta) = (1+\vartheta)^2, \end{cases} \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Parte a). La curva è semplice, in quanto per ogni coppia ϑ_1, $\vartheta_2 \in [0, 2\pi]$

$$z(\vartheta_1) = z(\vartheta_2) \Leftrightarrow \vartheta_1 = \vartheta_2.$$





Inoltre

$$\gamma(0) = (1, 0, 1) \neq (1 + 2\pi, 0, (1 + 2\pi)^2) = \gamma(2\pi),$$

e quindi la curva non è chiusa. Infine, per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi]$

$$\varphi'(\vartheta) = (\cos\vartheta - (1+\vartheta)\sin\vartheta, \sin\vartheta + (1+\vartheta)\cos\vartheta, 2(1+\vartheta)),$$

che restituisce $\|\varphi'(\vartheta)\|^2 = 1 + 5(1+\vartheta)^2 > 0$. Dunque γ è regolare.

Parte b). Fissato $\vartheta \in [0, 2\pi]$, si ha

$$\varphi''(\vartheta) = (-2\sin\vartheta - (1+\vartheta)\cos\vartheta, 2\cos\vartheta - (1+\vartheta)\sin\vartheta, 2),$$

con $\|\varphi''(\vartheta)\| = \sqrt{8 + (1+\vartheta)^2}$ e conseguentemente

$$N(\vartheta) = \frac{(-2\sin\vartheta - (1+\vartheta)\cos\vartheta, 2\cos\vartheta - (1+\vartheta)\sin\vartheta, 2)}{\sqrt{8 + (1+\vartheta)^2}}.$$

Per $\vartheta = 0$ risulta $\varphi'(0) = (1, 1, 2)$, $\varphi''(0) = (-1, 2, 2)$ e pertanto

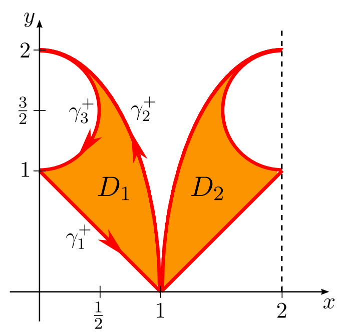
$$k(0) = \frac{\|\varphi'(0) \times \varphi''(0)\|}{\|\varphi'(0)\|^3} = \frac{\|(-2, -4, 3)\|}{6\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{29}}{6\sqrt{6}}.$$

Parte c). Per definizione

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_0^{2\pi} f(\varphi(\vartheta))\|\varphi'(\vartheta)\| d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1+\vartheta}{\sqrt{1 + 5(1+\vartheta)^2}} \cdot \sqrt{1 + 5(1+\vartheta)^2}\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} (1+\vartheta)\, d\vartheta \\ &= \left[\vartheta + \frac{\vartheta^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi(1+\pi).\end{aligned}$$

Esercizio 4. La funzione integranda $f(x,y) = 3|x-1| + 2y$ e il dominio assegnato D sono entrambi simmetrici rispetto alla retta $x = 1$. Pertanto, in riferimento alla figura sotto riportata,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy.$$



Si osservi che, per ogni $(x,y) \in D_1$ risulta $f(x,y) = 3(1-x) + 2y$, essendo $x \leq 1$, e che $f(x,y) = \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, dove $P(x,y) = 3(1-x)y + y^2$. Applicando le formule di Gauss–Green nel piano si ha

$$\iint_D f(x,y)dxdy = -2\int_{\partial^+ D_1} P dx,$$

ove, chiaramente $\partial^+ D_1 = \cup_{i=1}^3 \gamma_i^+$, cfr. figura. Le parametrizzazioni delle curve γ_i, $i = 1,2,3$, che rispettano l'orientamento positivo sono

$$\gamma_1^+ \colon \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 1-t, \\ t \in [0,1], \end{cases} \qquad \gamma_2^+ \colon \begin{cases} x(\vartheta) = \cos\vartheta, \\ y(\vartheta) = 2\sin\vartheta, \\ \vartheta \in [0,\pi/2], \end{cases} \qquad \gamma_3^+ \colon \begin{cases} x(\vartheta) = \cos(\vartheta)/2, \\ y(\vartheta) = (3-\sin\vartheta)/2, \\ \vartheta \in [-\pi/2,\pi/2]. \end{cases}$$

Per definizione

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1^+} P dx &= \int_0^1 P(x(t),y(t))x'(t)dt = \int_0^1 4(1-t)^2 dt \\ &= 4\left[t - t^2 + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Analogamente

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_2^+} P dx &= \int_0^{\pi/2} P(x(\vartheta), y(\vartheta))x'(\vartheta)\, d\vartheta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[6\sin\vartheta(1-\cos\vartheta) + 4\sin^2\vartheta\right](-\sin\vartheta)\, d\vartheta \\
&= 6\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin^2\vartheta\, d\vartheta - 6\int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta\, d\vartheta - 4\int_0^{\pi/2} \sin^3\vartheta\, d\vartheta \\
&= 2\left[\sin^3\vartheta\right]_0^{\pi/2} - 3\left[\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta\right]_0^{\pi/2} - 4\left[\frac{\cos^3\vartheta}{3} - \cos\vartheta\right]_0^{\pi/2} \\
&= 2 - \frac{3\pi}{2} - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}
$$

Infine

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_3^+} P dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(x(\vartheta), y(\vartheta))x'(\vartheta)\, d\vartheta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{27}{4} - 3\sin\vartheta - \frac{9\cos\vartheta}{4} + \frac{\sin^2\vartheta}{4} + \frac{3\sin\vartheta\cos\vartheta}{4}\right)\cdot\left(-\frac{\sin\vartheta}{2}\right)\, d\vartheta \\
&= -\frac{27}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\vartheta\, d\vartheta + \frac{3}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\vartheta\, d\vartheta + \frac{9}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta \\
&\qquad - \frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3\vartheta\, d\vartheta - \frac{3}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\sin^2\vartheta\, d\vartheta \\
&= \frac{27}{8}[\cos\vartheta]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{3}{4}[\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{9}{32}[\cos(2\vartheta)]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&\qquad - \frac{1}{8}\left[\frac{\cos^3\vartheta}{3} - \cos\vartheta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{8}[\sin^3\vartheta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3\pi - 1}{4}.
\end{aligned}
$$

In conclusione

$$
\int_{\partial^+ D_1} P dx = \frac{5 - 9\pi}{12} \Longrightarrow \iint_D (3|x-1| + 2y)dxdy = \frac{9\pi - 5}{6}.
$$