UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

C.d.L. Triennale in
Ingegneria Biomedica
A.A. 2013/2014

Corso di *Analisi Matematica 2* – 6 CFU
Dr. G. Autuori

Prova scritta del 23 Ottobre 2014

Esercizio 1. Data la funzione $f(x,y) = e^{x^2|y|}$
$a)$ studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$;
$b)$ determinare, al variare del parametro $k > 0$, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti di f nell'insieme

$$B_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le k\}.$$

Esercizio 2. Data la curva piana $\gamma(t) = ((1-t)^2, 1+\cos t)$ con $t \in [1, \pi]$
$a)$ dire se γ è semplice, chiusa, regolare, rettificabile;
$b)$ indicata con Ω la regione del piano delimitata dagli assi coordinati e dal *supp* γ, calcolare

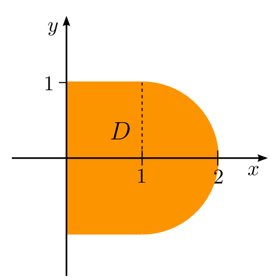
$$\iint_\Omega 2x \arccos(y-1)\, dxdy.$$

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F = \left(\frac{2x}{z}, \frac{2y}{z}, -\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$$

$a)$ dire se F è conservativo e, in caso affermativo, determinarne un potenziale e le superfici equipotenziali.
$b)$ determinare le linee di campo di F.

Esercizio 4. Sia D la lamina di densità unitaria rappresentata in figura.



$a)$ Determinare il baricentro di D e calcolare il momento d'inerzia di D rispetto ad un asse perpendicolare ad essa, passante per il punto $(1, 0)$.

$b)$ Determinare il volume del solido ottenuto dalla rotazione di D di un angolo di $360°$ attorno all'asse y.

Risoluzione

Esercizio 1. (8 punti) Parte a). Banalmente f è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\}$ e pertanto è ivi derivabile e differenziabile, con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x|y|e^{x^2|y|} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 e^{x^2 y}\operatorname{sign}(y).$$

Inoltre $f \in C(\mathbb{R}^2)$.

Consideriamo ora i punti dell'asse x ($y=0$). Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

D'altra parte, per $x \neq 0$ risulta

$$\frac{\partial^+ f}{\partial y}(x,0) = \lim_{k\to 0^+} \frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0^+} \frac{e^{kx^2}-1}{k} = x^2,$$

$$\frac{\partial^- f}{\partial y}(x,0) = \lim_{k\to 0^-} \frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0^-} \frac{e^{-kx^2}-1}{k} = -x^2,$$

mentre, per $x=0$ si trova

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0.$$

Quindi, nei punti del tipo $(x,0)$ con $x \neq 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial^+ f}{\partial y}(x,0) \neq \frac{\partial^- f}{\partial y}(x,0),$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

In altre parole, f è derivabile parzialmente rispetto ad x, ma non rispetto ad y, nei punti dell'asse x diversi dall'origine. Pertanto in tali punti f non è nemmeno differenziabile.

Infine, f risulta derivabile parzialmente in $(0,0)$ e ivi differenzibile, essendo le derivate parziali continue nell'origine.

Parte b). Innanzitutto osserviamo che per ogni $k>0$ l'insieme B_k è compatto e dunque f ammette minimo e massimo assoluto in B_k.

Sia $k>0$ fissato. Essendo f pari sia rispetto a x che rispetto a y è sufficiente studiare quello che succede per $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Si considera dunque l'insieme $B_k^+ = B_k \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}$.

Prima cerchiamo, tra i punti interni a B_k^+, quelli che annullano il gradiente di f, ossia quelli che soddisfano

$$(2xye^{x^2y}, x^2e^{x^2y}) = (0,0).$$

Gli unici punti che verificano la condizione sopra scritta sono quelli dell'asse y ($x = 0$), che però non sono interni a B_k^+, e dunque si escludono.

Rimangono da studiare i punti di $\partial B_k^+ = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell$, dove

$$\ell_1 = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq \sqrt{k}\}, \quad \ell_2 = \{(0, y) : 0 \leq y \leq \sqrt{k}\},$$
$$\ell = \{(\sqrt{k - y^2}, y) : 0 < y < \sqrt{k}\}.$$

Ora, se $(x, y) \in \ell$ si ha

$$f(x, y) = g(y) = (k - 3y^2)e^{y(k-y^2)}, \quad y \in (0, \sqrt{k}).$$

Si ha che $g'(y) \geq 0$ se e solo se $0 < y \leq \sqrt{k/3}$. Pertanto g raggiunge il suo massimo assoluto in $y = \sqrt{k/3}$ e il suo minimo assoluto agli estremi $y = 0$ e $y = \sqrt{k}$.

Dunque i punti del tipo $\left(\sqrt{\frac{2k}{3}}, \sqrt{\frac{k}{3}}\right) \in \ell$ sono di massimo relativo per f in B_k^+, con

$$f\left(\sqrt{\frac{2k}{3}}, \sqrt{\frac{k}{3}}\right) = e^{\frac{2k\sqrt{k}}{3\sqrt{3}}} > 1.$$

D'altra parte $f(x, y) \equiv 1$ per ogni $(x, y) \in \ell_1 \cup \ell_2$, e perciò i punti dei segmenti ℓ_1 ed ℓ_2 sono di minimo assoluto per f in B_k^+.

In conclusione, data la simmetria di f, possiamo affermare che i punti $\left(\pm\sqrt{\frac{2k}{3}}, \sqrt{\frac{k}{3}}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{2k}{3}}, \pm\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$ sono gli unici punti di massimo relativo e asoluto per f in B_k, mentre tutti i punti di B_k che giacciono sugli assi coordinati sono di minimo relativo e assoluto per f in B_k.

Esercizio 2. (9 punti) Parte a). La curva γ è semplice in quanto, per esempio, per ogni t_1, $t_2 \in [1, \pi]$ si ha

$$(1 - t_1)^2 = (1 - t_2)^2 \iff |1 - t_1| = |1 - t_2| \iff t_1 = t_2.$$

Inoltre $\gamma(1) = (0, 1 + \cos 1) \neq ((1 - \pi)^2, 0) = \gamma(\pi)$ e quindi γ non è chiusa. D'altra parte, per ogni $t \in [1, \pi]$

$$\gamma'(t) = (-2(1 - t), -\sin t), \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{4(1 - t)^2 + \sin^2 t} > 0$$

e dunque γ è regolare. Infine γ è rettificabile. Infatti $\|\gamma'(t)\|$ è continua in $[1, \pi]$ e dunque ivi limitata. Pertanto esiste $M > 0$ tale che

$$\ell(\gamma) = \int_1^\pi \|\gamma'(t)\| dt \leq \int_1^\pi M \, dt = (\pi - 1)M < \infty.$$

Parte b). Osserviamo innanzitutto che la curva γ giace interamente nel primo quadrante. Infatti, gli estremi di γ si trovano su semiassi positivi, come visto sopra, mentre

$$x(t) = (1-t)^2 > 0 \;\text{ e }\; y(t) = 1 + \cos t > 0 \quad \text{per ogni } t \in (1, \pi).$$

Per Gauss–Green si ha

$$\begin{aligned}\iint_\Omega 2x \arccos(y-1)\, dxdy &= \int_{\partial^+\Omega} x^2 \arccos(y-1) dy \\ &= \int_{\sigma_1} x^2 \arccos(y-1) dy - \int_\gamma x^2 \arccos(y-1) dy \\ &\quad - \int_{\sigma_2} x^2 \arccos(y-1) dy,\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \le x \le (1-\pi)^2\right\}, \\ \sigma_2 &= \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \le y \le 1 + \cos 1\right\}.\end{aligned}$$

Pertanto $\displaystyle\int_{\sigma_1} x^2 \arccos(y-1) dy = 0$ essendo $dy = 0$ lungo σ_1, mentre invece $\displaystyle\int_{\sigma_2} x^2 \arccos(y-1) dy = 0$ perchè l'integranda è nulla lungo σ_2. Quindi

$$\iint_\Omega 2x \arccos(y-1)\, dxdy = \int_1^\pi (1-t)^4 t \sin t dt.$$

Successive integrazioni per parti mostrano che

$$\begin{aligned}\int (1-t)^4 t \sin t dt = &-t^5 \cos t + t^4 (5 \sin t + \cos t) - 2t^3 (8 \sin t + 7 \cos t) \\ &- 2t^2 (21 \sin t + 22 \cos t) + t(88 \sin t - 85 \cos t) \\ &+ 85 \sin t + 88 \cos t,\end{aligned}$$

e pertanto

$$\begin{aligned}&\iint_\Omega 2x \arccos(y-1)\, dxdy \\ &\quad = \pi^5 - 4\pi^4 - 14\pi^3 + 44\pi^2 + 85\pi - 120 \sin 1 - 88 + 24 \cos 1.\end{aligned}$$

Esercizio 3. (7 punti) Parte a). Il dominio del campo F è l'insieme $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}$ che non è connesso (e dunque neanche semplicemente connesso). Si vede facilmente, per integrazione diretta, che F è conservativo, in quanto ammette potenziale

$$U(x,y,x) = \frac{x^2+y^2}{z} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

e le superfici equipotenziali (ossia a potenziale costante) sono i paraboloidi

$$z = K(x^2+y^2), \quad K \in \mathbb{R}.$$

Parte b). Per determinare le linee di campo impostiamo il sistema

$$\frac{dx}{2x/z} = \frac{dy}{2y/z} = \frac{dz}{-(x^2+y^2)/z^2}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \frac{x^2+y^2}{x}dy = -2z\,dz, \quad \frac{x^2+y^2}{y}dy = -2z\,dz.$$

Integrando la prima equazione si trova immediatamente che $x = C_1 y$. Sostituendo questa espressione nella seconda equazione di trova

$$\frac{1+C_1^2}{C_1}ydy = -2zdz \quad \Longrightarrow \quad y^2 = -z^2 + k_1,$$

dove k_1 è un'opportuna costante. Analogamente si procede con la terza equazione e si trova

$$x^2 = -z^2 + k_2, \quad k_2 \in \mathbb{R}.$$

Pertanto le linee di campo di F sono rappresentate dalle equazioni

$$x = C_1 y, \quad x^2+y^2+2z^2 = C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

ossia sono ellissi contenute in piani verticali passanti per l'origine.

Esercizio 4.(6 punti) Parte a). Indicato con $G = (x_G, y_G)$ il baricentro di D, osserviamo che, data la simmetria della lamina e il fatto che essa ha densità costante, deve essere $y_G = 0$.

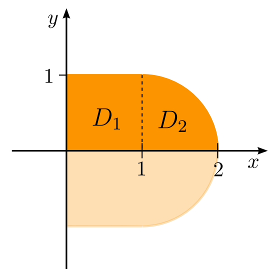
D'altra parte, con riferimento alla figura sotto, si ha

$$x_G = \frac{1}{|D|}\iint_D x\,dxdy = \frac{2}{|D|}\left\{\iint_{D_1} x\,dxdy + \iint_{D_2} x\,dxdy\right\}.$$

Chiaramente $|D| = 2(1+\pi/4) = (4+\pi)/2$. Inoltre

$$\iint_{D_1} x\,dxdy = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2},$$

$$\iint_{D_2} x\,dxdy = \int_0^1 (1+\varrho\cos\vartheta)\varrho d\varrho d\vartheta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}.$$



Ne segue che $G = (x_G, y_G) = \left(\dfrac{10+3\pi}{3(4+\pi)}, 0\right)$.

Per il calcolo del mometo d'inerzia I, osserviamo che la simmetria del dominio e la densità costante implicano

$$I = \iint_D \delta^2(x,y)dxdy = 2\{I_1 + I_2\},$$

$$I_1 = \iint_{D_1} \delta^2(x,y)dxdy, \quad I_2 = \iint_{D_2} \delta^2(x,y)dxdy,$$

dove $\delta(x,y)$ rappresenta la distanza di un generico punto della lamina dall'asse rispetto al quale si calcola I.

Chiaramente, se $(x,y) \in D_1$ allora $\delta(x,y) = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$ e

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \left[(1-x)^2 + y^2\right] dxdy = \int_0^1 (1-x)^2 dx + \int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{3}.$$

D'altra parte, per il calcolo di I_2, è conveniente traslare a sinistra gli assi coordinati, in modo tale che D_2 coincida con

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \geq 0\}$$

e che $\delta(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. In questa maniera si trova

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \varrho^3 d\varrho d\vartheta = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \varrho^3 d\varrho = \frac{\pi}{8}.$$

In conclusione $I = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\pi}{4}$.

Parte b). Per il teorema di Guldino si ha

$$V = x_G 2\pi |D| = \frac{(10+3\pi)\pi}{3}.$$