UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

C.d.L. Triennale in

Ingegneria Biomedica

A.A. 2013/2014

Corso di *Analisi Matematica 2* – 6 CFU

Dr. G. Autuori

Prova scritta del 21 Novembre 2014

Esercizio 1 Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'' - x' + y = 0, \\ y'' + y' = \cos t, \\ x(0) = x'(0) = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan x}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(e^{x/y} + xy - 1 \right), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

Esercizio 3. Data la funzione $f(x,y,z) = 2z(1+xy)e^{x^2+y^2}$ e posto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$, determinare il valore di

$$I = \iint_B \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy,$$

impostando il calcolo per strati.

Esercizio 4. Dato il campo vettoriale

$$F = (y^2(1+\sin z), x(1-zy), z(1+e^{-x})),$$

calcolare

$$\int_\gamma F ds,$$

dove γ è la curva ottenuta dall'intersezione tra la sfera di equazione $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 10$ e il piano xz.

Risoluzione

Esercizio 1. (6 punti) Il sistema assegnato è lineare, pertanto risulta conveniente l'uso della trasformata di Laplace. Dette $X(s) = \mathscr{L}[x(t)](s)$ e $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)](s)$ le trasformate delle funzioni incognite x e y, rispettivamente, si ha

$$\begin{cases} s^2X(s) - sx(0) - x'(0) - sX(s) + x(0) + Y(s) = 0, \\ s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) = \dfrac{s}{1+s^2}. \end{cases}$$

Usando le condizioni iniziali si deduce

$$\begin{cases} s^2X(s) - s - sX(s) + Y(s) = 0, \\ s^2Y(s) + sY(s) = \dfrac{s}{1+s^2}. \end{cases}$$

Ricavando $Y(s)$ dalla seconda equazione si trova

$$Y(s) = \frac{1}{(1+s)(1+s^2)}$$

e conseguentemente

$$X(s) = \frac{s - Y(s)}{s(s-1)} = \frac{s^4 + s^3 + s^2 + s - 1}{s(s-1)(1+s)(1+s^2)}.$$

Usando la decomposizione di Hermite troviamo

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{s+2}{2(s-1)(s+1)} - \frac{s}{2(1+s^2)}, \quad Y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+s} - \frac{s-1}{1+s^2}\right).$$

Applicando l'antitrasformata di Laplace si trova

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s-1)(s+1)}\right](t) - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{1+s^2}\right](t) \\ &= 1 + \frac{3e^t - e^{-t}}{4} - \frac{\cos t}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+s}\right](t) - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{1+s^2}\right](t)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-t} + \sin t - \cos t\right). \end{aligned}$$

Esercizio 2. (7 punti) La funzione assegnata non è continua nell'origine in quanto il limite di f per $(x, y) \to (0, 0)$ dipende chiaramente dalla direzione lungo la quale ci si muove. Infatti, in coordinate polari

$$f(\varrho, \vartheta) = \frac{\arctan(\varrho\cos\vartheta)}{\varrho} \cdot (e^{\operatorname{cotg}\vartheta} - 1 + \varrho^2\cos\vartheta\sin\vartheta).$$

Ora se, per esempio, $\vartheta = \pi/2$ si ha $f(\varrho, \vartheta) = 0 \to 0$ per $\varrho \to 0$, mentre per $\vartheta = \pi/4$ si trova

$$f(\varrho,\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\arctan(\varrho\sqrt{2}/2)}{\varrho\sqrt{2}/2}\left(e-1+\frac{\varrho^2}{2}\right) \to \frac{\sqrt{2}}{2}(e-1) \quad \text{per } \varrho \to 0.$$

Pertanto f non è nemmeno differenziabile in $(0,0)$.

D'altra parte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

e analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{h} = 0.$$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$ con $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Esercizio 3. (8 punti) L'integrale richiesto è l'integrale di volume di f nel solido racchiuso tra il cono di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e il paraboloide di equazione $z = 2 - x^2 - y^2$. Pertanto, posto

$$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le z^2\} \quad \text{con } 0 \le z \le 1,$$
$$B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2-z\} \quad \text{con } 1 \le z \le 2,$$

si ha $I = I_1 + I_2$, dove

$$I_1 = \int_0^1 \iint_{B_1} f(x,y,z)dxdydz, \quad I_2 = \int_1^2 \iint_{B_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

Passando a coordinate polari si ha

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \left(2z\int_0^{2\pi}\int_0^z e^{\varrho^2}(1+\varrho^2\sin\vartheta\cos\vartheta)\varrho d\varrho d\vartheta\right)dz \\ &= \int_0^1 z\left(\int_0^{2\pi}\int_0^z 2\varrho e^{\varrho^2}d\varrho d\vartheta + \int_0^{2\pi}\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta\int_0^z 2\varrho^3 e^{\varrho^2}d\varrho\right)dz \\ &= \int_0^1 \left(z\int_0^{2\pi}\int_0^z 2\varrho e^{\varrho^2}d\varrho d\vartheta\right)dz, \end{aligned}$$

essendo $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta = 0$. Quindi

$$I_1 = \int_0^1 2\pi z\left[e^{\varrho^2}\right]_0^z dz = \pi\int_0^1 [2z(e^{z^2}-1)]dz = \pi(e-2).$$

Analogamente si trova

$$I_2 = \int_1^2 2\pi z\left[e^{\varrho^2}\right]_0^{\sqrt{2-z}} dz = \int_1^2 2\pi z(e^{2-z}-1)dz = \pi(4e-9).$$

In conclusione

$$I = \pi(e-2) + \pi(4e-9) = \pi(5e-11).$$

Esercizio 4. (9 punti) La curva γ è la circonferenza di equazione $x^2 + z^2 = 1$ nel piano xz. Essa rappresenta il bordo della semisfera $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 10,\ y \geq 0\}$. Per il Teorema di Stokes si ha

$$\int_\gamma F ds = \iint_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot \nu \, d\sigma,$$

dove abbiamo indicato con $d\sigma$ il generico termine differenziale di superficie e con ν la normale esterna ad essa. Ora, considerata la superficie chiusa $S = \Sigma \cup B$, con $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1,\ y = 0\}$, si ha

$$\begin{aligned} 0 = \iint_S \mathrm{rot} F \cdot \nu d\sigma &= \iint_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot \nu d\sigma + \iint_B \mathrm{rot} F \cdot \nu d\sigma \\ &= \int_\gamma F ds + \iint_B \mathrm{rot} F \cdot \nu d\sigma, \end{aligned}$$

e pertanto

$$\int_\gamma F ds = -\iint_B \mathrm{rot} F \cdot \nu d\sigma.$$

Ora, la normale a B, esterna alla superficie Σ, coincide con il vettore $(0,-1,0)$, quindi

$$\iint_B \mathrm{rot} F \cdot \nu d\sigma = -\iint_{\{x^2+z^2\leq 1\}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}(x,0,z) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,0,z) \right) dxdz,$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_\gamma F ds &= \iint_{\{x^2+z^2\leq 1\}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}(x,0,z) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,0,z) \right) dxdz \\ &= \iint_{\{x^2+z^2\leq 1\}} z e^{-x} dxdz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \varrho^2 e^{-\varrho\cos\vartheta} \sin\vartheta d\varrho d\vartheta \\ &= \int_0^1 \varrho \left[e^{-\varrho\cos\vartheta} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} d\varrho = 0. \end{aligned}$$