

UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

C.d.L. Triennale in
Ingegneria Informatica e dell'Automazione

A.A. 2012/2013

Corso di *Analisi Matematica 2* – 9 CFU

Dr. G. Autuori

Prova scritta del 4 Novembre 2013

Esercizio 1. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $F = (F_1, F_2, F_3)$ il campo definito da

$$F_1(x, y, z) = \alpha z^2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}(1 + x^2 + y^2)} + 2x \log z,$$

$$F_2(x, y, z) = z^2 + \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}(1 + x^2 + y^2)} + \beta z,$$

$$F_3(x, y, z) = 2z(x + y) + (\alpha + \beta) \frac{x^2}{z}.$$

Dopo aver individuato il dominio $\mathcal{D}$ di F si stabilisca per quali valori di α e β il campo è: (i) irrotazionale in $\mathcal{D}$; (ii) conservativo in $\mathcal{D}$.

Inoltre, in corrispondenza ai valori α, β determinati al punto (ii), si calcoli il lavoro di F lungo γ , dove γ è la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione della sfera unitaria centrata in $(1, 1, 1)$ e di raggio $1/2$ con il piano $z = 1$.

Esercizio 2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ l'unione dei dischi $B((0, 1), 1)$, $B((-1, 0), 1)$, $B((0, -1), 1)$ e $B((1, 0), 1)$. Data la funzione

$$f_\alpha(x, y) = \frac{[(x^2 + y^2)^2 - \alpha^2][(|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2]}{x^2 + (y - 1)^2 + 2y + \alpha - 1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+,$$

calcolare

$$I_\alpha = \iint_{\Omega} f_\alpha(x, y) dx dy, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Esercizio 3. Calcolare $\oint_{\gamma} \frac{4e^{z+1}}{z^2(z+4)(4z^2+\pi^2)} dz$, dove γ è il bordo del triangolo in $\mathbb{R}^2$ di vertici $(-3, 0)$, $(3, -4)$ e $(3, 4)$.

Esercizio 4. Date le funzioni f , definita in $\mathbb{R}_0^+$ da

$$f(t) = \begin{cases} 4(t - 2n\pi)^2 / \pi^2, & t \in [2n\pi, (4n+1)\pi/2), \\ \sin t, & t \in [(4n+1)\pi/2, (2n+1)\pi), \\ 0, & t \in [(2n+1)\pi, 2(n+1)\pi), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0^+,$$

e $g(t) = \sin t$, calcolare $\int_0^\infty e^{-2t} g * f(t) dt$.

Risoluzione

Esercizio 1. Il dominio di definizione del campo vettoriale F è

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \neq (0, 0), z > 0\},$$

che evidentemente non è semplicemente connesso.

(i) Affinché F sia irrotazionale in $\mathcal{D}$ occorre che per ogni $(x, y, z) \in \mathcal{D}$

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{-2x[y + 3x^2y + 3y^3]}{(x^2 + y^2)^{3/2}(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{-2y[x + 3y^2x + 3x^3]}{(x^2 + y^2)^{3/2}(1 + x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \Leftrightarrow 2\alpha z + 2\frac{x}{z} = 2z + 2(\alpha + \beta)\frac{x}{z}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \Leftrightarrow 2z + \beta = 2z. \end{cases}$$

Dal sistema si ricavano immediatamente $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Per tali valori il campo è irrotazionale in tutto il suo dominio.

(ii) Poiché $\mathcal{D}$ non è semplicemente connesso, la irrotazionalità è solo una condizione necessaria per la conservatività, ma non sufficiente. Bisogna dunque stabilire se F ammette un potenziale U in $\mathcal{D}$, quando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Tale potenziale, se esiste, deve innanzitutto soddisfare la relazione

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = F_1(x, y, z)$$

il che implica

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_{\mathcal{D}} F_1(x, y, z) dx + U_1(y, z) \\ &= xz^2 + 2 \arctan \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 \log z + U_1(y, z). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}(1 + x^2 + y^2)} + \frac{\partial U_1(y, z)}{\partial y} = F_2(x, y, z),$$

da cui $\frac{\partial U_1(y, z)}{\partial y} = z^2$, e di conseguenza

$$U_1(x, y, z) = z^2 y + 2 \arctan \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 \log z + U_2(z).$$

Quindi finora abbiamo ottenuto

$$U(x, y, z) = (x + y)z^2 + 2 \arctan \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 \log z + U_2(z).$$

Imponiamo l'ultima condizione sulla derivata rispetto a z , ossia

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = 2(x + y)z + \frac{x^2}{z} + U_2'(z) = F_3(x, y, z),$$

che implica $U_2'(z) = 0 \Rightarrow U_2(z) = C$. In definitiva

$$(1) \quad U(x, y, z) = (x + y)z^2 + 2 \arctan \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 \log z + C.$$

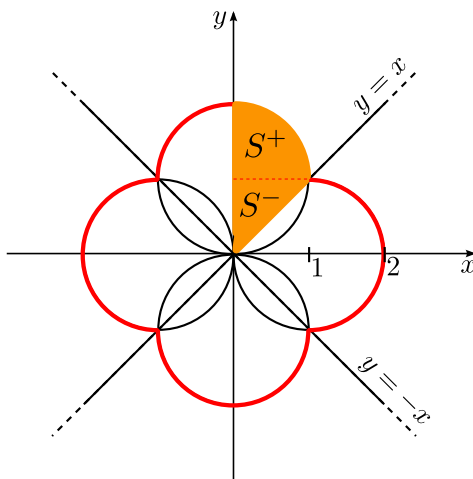
Pertanto il campo F è conservativo in $\mathcal{D}$ per $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, con potenziale definito in (1).

Infine, per determinare il lavoro di F lungo γ , in corrispondenza ai valori $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, basta osservare che γ è una curva regolare semplice e chiusa in $\mathcal{D}$ e dunque, essendo F conservativo per $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, tale lavoro è nullo.

Esercizio 2. Innanzitutto osserviamo che la funzione assegnata si può semplificare nella forma

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - \alpha)[(|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2].$$

Si vede subito che f è simmetrica rispetto ad entrambe le bisettrici essendo $f(y, x) = f(x, y)$ e $f(-y, -x) = f(x, y)$. Inoltre f è pari poiché $f(-x, y) = f(x, y)$. Dunque, data la simmetria del dominio ci si può limitare al calcolo dell'integrale nella sola regione $\mathcal{S} = \mathcal{S}^+ \cup \mathcal{S}^-$, evidenziata in figura, e poi moltiplicare per 8 il risultato ottenuto al fine di determinare il valore di I_α .



Per la regione $\mathcal{S}^+$ è conveniente utilizzare le coordinate polari

$$\begin{cases} x(\varrho, \vartheta) = \varrho \cos \vartheta, \\ y(\varrho, \vartheta) = 1 + \varrho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \varrho \in (0, 1), \quad \vartheta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Il modulo del determinante della matrice Jacobiana è ϱ . Dunque

$$\begin{aligned}
\int_{S^+} f_\alpha(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} f_\alpha(\varrho, \vartheta) \cdot \varrho d\varrho d\vartheta \\
&= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (\varrho^2 + 2\varrho \sin \vartheta + 1 - \alpha) \cdot (\varrho^2 - 2\varrho \cos \vartheta + 1) \cdot \varrho d\varrho d\vartheta.
\end{aligned}$$

Moltiplicando e raccogliendo i termini simili si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{S^+} f_\alpha(x, y) dx dy &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \varrho^5 d\varrho + 2 \int_0^1 \varrho^4 d\varrho \int_0^{\pi/2} (\sin \vartheta - \cos \vartheta) d\vartheta \\
&\quad + \int_0^1 \varrho^3 d\varrho \int_0^{\pi/2} (2 - \alpha - 4 \sin \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta \\
&\quad + 2 \int_0^1 \varrho^2 d\varrho \int_0^{\pi/2} [\sin \vartheta + (\alpha - 1) \cos \vartheta] d\vartheta \\
&\quad + \frac{\pi}{2} (1 - \alpha) \int_0^1 \varrho d\varrho \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{2}{5} \int_0^{\pi/2} (\sin \vartheta - \cos \vartheta) d\vartheta \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (2 - \alpha - 4 \sin \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta \\
&\quad + \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} [\sin \vartheta + (\alpha - 1) \cos \vartheta] d\vartheta + \frac{\pi}{4} (1 - \alpha) \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{2}{5} [\sin \vartheta + \cos \vartheta]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{8} (2 - \alpha) + \frac{1}{2} [\cos^2 \vartheta]_0^{\pi/2} \\
&\quad - \frac{2}{3} [\cos \vartheta + (1 - \alpha) \sin \vartheta]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{4} (1 - \alpha).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{S^+} f_\alpha(x, y) dx dy = \frac{7}{12} \pi - \frac{3}{8} \alpha \pi + \frac{2}{3} \alpha - \frac{1}{2}.$$

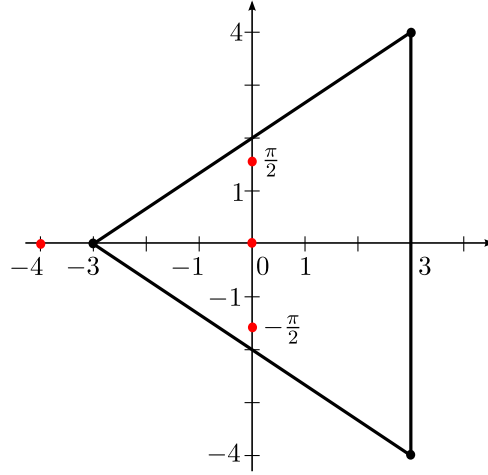
Calcoliamo ora l'integrale su $\mathcal{S}^-$ in coordinate cartesiane. Si ha

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{S}^-} f_\alpha(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_x^1 (x^2 + y^2 - \alpha) \cdot (x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2) dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_x^1 [x^4 + y^4 - 2x^3 - 2y^3 + 2x^2y^2 - 2x^2y - 2xy^2 \\
 &\quad + (2 - \alpha)x^2 + (2 - \alpha)y^2 + 2\alpha x + 2\alpha y - 2\alpha] dy dx \\
 &= \int_0^1 \left[x^4y + \frac{y^5}{5} - 2x^3y - \frac{y^4}{2} + \frac{2}{3}x^2y^3 - x^2y^2 - \frac{2}{3}xy^3 \right. \\
 &\quad \left. + (2 - \alpha)x^2y + \frac{2 - \alpha}{3}y^3 + 2\alpha xy + \alpha y^2 - 2\alpha y \right]_x^1 dx \\
 &= \int_0^1 \left[-\frac{28}{15}x^5 + \frac{31}{6}x^4 + \frac{4\alpha - 14}{3}x^3 + \left(\frac{5}{3} - 4\alpha\right)x^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2 - 12\alpha}{3}x - \frac{3}{10} + \frac{2 - 4\alpha}{3} \right] dx \\
 &= -\frac{28}{15} \cdot \frac{1}{6} + \frac{31}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4\alpha - 14}{3} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{3} - 4\alpha\right) \cdot \frac{1}{3} \\
 &\quad - \frac{2 - 12\alpha}{6} - \frac{3}{10} + \frac{2 - 4\alpha}{3} \\
 &= \frac{13}{90} - \frac{\alpha}{3}.
 \end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned}
 I_\alpha &= 8 \left(\int_{\mathcal{S}^+} f_\alpha(x, y) dx dy + \int_{\mathcal{S}^-} f_\alpha(x, y) dx dy \right) \\
 &= 8 \left(\frac{7}{12}\pi - \frac{3}{8}\alpha\pi + \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{2} + \frac{13}{90} - \frac{\alpha}{3} \right) \\
 &= 8 \left(\frac{7}{12}\pi - \frac{3}{8}\alpha\pi + \frac{\alpha}{3} - \frac{16}{45} \right), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.
 \end{aligned}$$

Esercizio 3. Usiamo il Teorema dei residui. Chiaramente l'integranda $f(z) = \frac{4e^{z+1}}{z^2(z+4)(4z^2+\pi^2)}$ è analitica in tutto $\mathbb{C} \setminus \left\{0, -4, \pm i\frac{\pi}{2}\right\}$. Tali singolarità sono poli per f . Più precisamente $z = 0$ è un polo doppio, mentre $z = -4$ e $z = \pm i\frac{\pi}{2}$ sono poli semplici.



Osserviamo inoltre che $z = -4$ non ricade all'interno dell'area racchiusa da γ . Dunque

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left\{ \text{Res}(f, 0) + \text{Res}\left(f, i\frac{\pi}{2}\right) + \text{Res}\left(f, -i\frac{\pi}{2}\right) \right\}.$$

Calcoliamo i residui. Essendo $z = 0$ polo doppio si ha

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z+1} \left[z^3 + 3z^2 + \left(\frac{\pi^2}{4} - 8\right)z + \frac{3}{4}\pi^2 \right]}{(z+4)^2 \left(z^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)^2} \\ &= \frac{3e}{4\pi^2}. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(f, i\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{z \rightarrow i\frac{\pi}{2}} \left(z - i\frac{\pi}{2}\right) f(z) = \lim_{z \rightarrow i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{z+1}}{z^2(z+4)\left(z + i\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{8ei}{\pi^3(\pi - 8i)}. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(f, -i\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{z \rightarrow -i\frac{\pi}{2}} \left(z + i\frac{\pi}{2}\right) f(z) = \lim_{z \rightarrow -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{z+1}}{z^2(z+4)\left(z - i\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{-8ei}{\pi^3(\pi + 8i)}. \end{aligned}$$

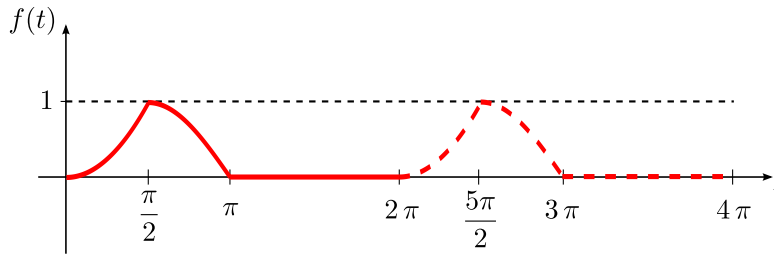
In definitiva

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \frac{(3\pi^3 + 192\pi - 512)ei}{2\pi^2(\pi^2 + 64)}.$$

Esercizio 4. L'integrale richiesto non è altro che la trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione tra f e g , valutata nel punto $s = 2$. Pertanto, per le proprietà della trasformata si ha

$$\int_0^\infty e^{-2t} g * f(t) dt = \mathcal{L}[g * f(t)](2) = \mathcal{L}[g(t)](2) \cdot \mathcal{L}[f(t)](2).$$

La trasformata di g è nota e si ha $\mathcal{L}[g(t)](2) = \frac{1}{1+s^2} \Big|_{s=2} = \frac{1}{5}$. Non resta che determinare $\mathcal{L}[f(t)](2)$. Osserviamo innanzitutto che f è un segnale periodico di periodo $T = 2\pi$, come è mostrato in figura.



Pertanto, considerando che il contributo di f in $[\pi, 2\pi)$ è nullo, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)](2) &= \frac{1}{1 - e^{-4\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-2t} f(t) dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-4\pi}} \left\{ \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} e^{-2t} t^2 dt + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-2t} \sin t dt \right\}. \end{aligned}$$

Integrando due volte per parti si ottiene

$$\int_0^{\pi/2} e^{-2t} t^2 dt = -\frac{1}{2} \left[e^{-2t} \left(t^2 + t + \frac{1}{2} \right) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} - e^{-\pi} \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Analogamente, sempre integrando due volte per parti, si trova

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-2t} \sin t dt = -\frac{2}{5} \left[e^{-2t} \left(\frac{\cos t}{2} + \sin t \right) \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{5} \left(e^{-\pi} + \frac{e^{-2\pi}}{2} \right).$$

In definitiva

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-2t} g * f(t) dt &= \frac{1}{5(1 - e^{-4\pi})} \left\{ \frac{2}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} - e^{-\pi} \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{2}{5} \left(e^{-\pi} + \frac{e^{-2\pi}}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{5(1 - e^{-4\pi})} \left[\frac{1}{\pi^2} - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \right) e^{-\pi} + \frac{e^{-2\pi}}{5} \right]. \end{aligned}$$