RISOLUZIONE

1. L'affermazione $\boxed{\mathbf{A}}$ è falsa, la successione $a_n = n+(-1)^n$ è divergente a $+\infty$, poiché $n+(-1)^n \geq n-1 \to +\infty$ ma non è crescente: $a_1 = 0 < a_2 = 3$ ma $a_2 = 3 > a_3 = 2$. L'affermazione $\boxed{\mathbf{B}}$ è vera, la successione $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ è infatti convergente e dunque, per quanto provato a lezione, limitata. Anche l'affermazione $\boxed{\mathbf{C}}$ è vera. Infatti essendo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, dalla definizione di limite esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 1$ per ogni $n \geq n_0$. Posto allora $m = \min\{1; a_0; a_1; ...; a_{n_0-1}\}$ avremo che $a_n \geq m$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. La successione risulta quindi inferiormente limitata e quindi ammette estremo inferiore finito.

2. L'affermazione $\boxed{\mathbf{A}}$ è falsa. Si pensi ad esempio alle successioni $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$. Tali successioni convergono entrambe allo stesso limite $\ell = 0$ per $n \to +\infty$ pur non essendo asintotiche:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n} = +\infty$$

Si osservi che se invece il limite ℓ risulta finito non nullo allora le due successioni risultano asintotiche. L'affermazione $\boxed{\mathbf{B}}$ è invece vera. Infatti essendo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n - \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{x_n} = 1$ per ogni successione $x_n \to 0$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{a_n-b_n} = 1$$

$\boxed{\mathbf{C}}$ è falsa. Le successioni $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ e $b_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ convergono allo stesso limite $\ell = 1$ per $n \to +\infty$ e $\log a_n \not\sim \log b_n$ dato che

$$\log a_n = \log\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \sim \tfrac{1}{n} \quad \text{mentre} \quad \log a_n = \log\left(1 + \tfrac{1}{n^2}\right) \sim \tfrac{1}{n^2}$$

e $\frac{1}{n} \not\sim \frac{1}{n^2}$.

3. L'affermazione $\boxed{\mathbf{A}}$ è falsa. Per esempio le successioni $a_n = \frac{n+2}{n^2}$ e $b_n = \frac{n^2+1}{n^3}$ sono positive, infinitesime e asintotiche. Considerata però la successione $c_n = \frac{1}{n}$ abbiamo che

$$a_n - c_n = \tfrac{n+2}{n^2} - \tfrac{1}{n} = \tfrac{2}{n^2} \not\sim b_n - c_n = \tfrac{n^2+1}{n^3} - \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^3}$$

L'affermazione $\boxed{\mathbf{B}}$ è invece vera, infatti essendo le due successioni asintotiche risulta $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ e quindi

$$\tfrac{(a_n)^\alpha}{(b_n)^\alpha} = \left(\tfrac{a_n}{b_n}\right)^\alpha \to 1^\alpha = 1$$

ovvero $(a_n)^\alpha \sim (b_n)^\alpha$.
Anche l'affermazione $\boxed{\mathbf{C}}$ è invece vera, infatti essendo le due successioni asintotiche risulta $\frac{b_n}{a_n} \to 1$ e quindi

$$\frac{\log a_n}{\log b_n} = \frac{\log a_n - \log b_n + \log b_n}{\log b_n} = \frac{\log \frac{a_n}{b_n}}{\log b_n} + 1 \to 1$$

dato che $\log \frac{a_n}{b_n} \to 0$ e $\log b_n \to -\infty$.

4. L'affermazione $\boxed{\textbf{A}}$ è falsa. Si considerino ad esempio le successioni regolari $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$. Si ha che $a_n - b_n \to 0$ per $n \to +\infty$ mentre $\frac{a_n}{b_n} = n \to +\infty$.

L'affermazione $\boxed{\textbf{B}}$ è invece vera. Infatti, dal limite notevole $e^{x_n} \to 1$ per ogni successione $x_n \to 0$, si ha che $\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n - b_n} \to 1$.

L'affermazione $\boxed{\textbf{C}}$ è falsa. Le successioni regolari $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ e $b_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ sono tali che $a_n - b_n \to 0$ per $n \to +\infty$ mentre, dal limite notevole $\log(1 + x_n) \sim x_n$ per ogni successione $x_n \to 0$, otteniamo $\frac{\log(a_n)}{\log(b_n)} \sim n \to +\infty$.

5. Per calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1}$ usiamo i limiti notevoli visti e la relazione di asintotico. Per $n \to +\infty$, dato che per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesima risulta

$$\log(1 + x_n) \sim x_n \quad \text{e} \quad 1 - \cos(x_n) \sim \frac{x_n^2}{2}$$

abbiamo

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1} \sim \frac{\frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{2}\frac{1}{n}} = -\frac{2}{n}$$

Poiché $\frac{2}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$ ne deduciamo che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1} = 0$

6. Per calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sin\frac{1}{n^2}} - 1}{\sqrt{\cos\frac{1}{n}} - 1}$, ricordiamo che per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesima risulta

$$e^{x_n} - 1 \sim x_n \qquad \sin x_n \sim x_n \qquad \sqrt{1 + x_n} - 1 \sim \tfrac{1}{2}x_n \quad \text{e} \quad 1 - \cos x_n \sim \tfrac{1}{2}x_n^2$$

Quindi per $n \to +\infty$ otteniamo

$$e^{\sin\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \sin\tfrac{1}{n^2} \sim \tfrac{1}{n^2}$$

mentre

$$\sqrt{\cos\tfrac{1}{n}} - 1 = \sqrt{1 + \left(\cos\tfrac{1}{n} - 1\right)} - 1 \sim \tfrac{1}{2}\left(\cos\tfrac{1}{n} - 1\right) \sim -\tfrac{1}{2n^2}$$

da cui

$$\frac{e^{\sin\frac{1}{n^2} - 1}}{\sqrt{\cos\frac{1}{n}} - 1} \sim \frac{\frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{2n^2}} = -2$$

e dunque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sin\frac{1}{n^2}} - 1}{\sqrt{\cos\frac{1}{n}} - 1} = -2$

7. Calcoliamo $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\tan\frac{1}{2^n}} - 1}{\sqrt[3]{\cos\frac{1}{3^n}} - 1} \log\left(\cos\tfrac{1}{2^n}\right)$ procedendo come nei precedenti esempi ricordando inoltre che per ogni successione infinitesima $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ risulta $\tan x_n \sim x_n$. Per $n \to +\infty$ otteniamo allora

$$e^{\tan\frac{1}{2^n}} - 1 \sim \tan\tfrac{1}{2^n} \sim \tfrac{1}{2^n},$$

$$\sqrt[3]{\cos\tfrac{1}{3^n}}-1\sim\tfrac{1}{3}\left(\cos\tfrac{1}{3^n}-1\right)\sim-\tfrac{1}{6}\tfrac{1}{3^{2n}}$$

e

$$\log\left(\cos\tfrac{1}{2^n}\right)=\log\left(1+\left(\cos\tfrac{1}{2^n}-1\right)\right)\sim\left(\cos\tfrac{1}{2^n}-1\right)\sim-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2^{2n}}$$

Quindi per $n\to+\infty$ abbiamo

$$\frac{e^{\tan\frac{1}{2^n}}-1}{\sqrt[3]{\cos\frac{1}{3^n}}-1}\log\left(\cos\tfrac{1}{2^n}\right)\sim\frac{\frac{1}{2^n}}{-\frac{1}{6}\frac{1}{3^{2n}}}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2^{2n}}\right)=3\cdot\frac{3^{2n}}{2^{3n}}=3\cdot\left(\tfrac{9}{8}\right)^n\to+\infty$$

e dunque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\tan\frac{1}{2^n}}-1}{\sqrt[3]{\cos\frac{1}{3^n}}-1}\log\left(\cos\tfrac{1}{2^n}\right)=+\infty.$

8. Per calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\tan\frac{1}{n^3}}{\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt[3]{n^2+1}}$, osserviamo innanzitutto che possiamo scrivere il denominatore come

$$\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt[3]{n^2+1}=\sqrt[3]{n^2+n}\left(1-\tfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+n}}\right)=\sqrt[3]{n^2+n}\left(1-\sqrt[3]{\tfrac{n^2+1}{n^2+n}}\right)=\sqrt[3]{n^2+n}\left(1-\sqrt[3]{1+\tfrac{1-n}{n^2+n}}\right)$$

Abbiamo poi che per $n\to+\infty$ risulta

$$\sqrt[3]{n^2+n}=n^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\tfrac{1}{n}}\sim n^{\frac{2}{3}},$$

essendo $\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\to1$ e dunque $\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\sim1$, mentre

$$1-\sqrt[3]{1+\tfrac{1-n}{n^2+n}}\sim-\tfrac{1}{3}\tfrac{1-n}{n^2+n}\sim\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{n}$$

dato che $\frac{1-n}{n^2+n}\to0$ e che $\frac{1-n}{n^2+n}=\frac{1}{n}\frac{\frac{1}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}\sim-\frac{1}{n}$. Otteniamo allora che

$$\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt[3]{n^2+1}\sim n^{\frac{2}{3}}\cdot\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{n}=\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

da cui in particolare che $\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt[3]{n^2+1}\to0$, il limite dato presenta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Osservato che che per $n\to+\infty$ risulta $\tan\frac{1}{n^3}\sim\frac{1}{n^3}$ possiamo concludere che

$$\frac{\tan\frac{1}{n^3}}{\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt[3]{n^2+1}}\sim\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}=\frac{3}{n^{\frac{8}{3}}}\to0$$

9. Calcoliamo $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{1}{2^n}}-1}{\log\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\sin\frac{1}{3^n}}$. Come nei precedenti esercizi osserviamo che per $n\to+\infty$, per il numeratore abbiamo

$$\sqrt[4]{1+\tfrac{1}{2^n}}-1\sim\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2^n}$$

Riguardo al denominatore osserviamo che per $n\to+\infty$ abbiamo

$$\log\left(1+\tfrac{1}{2^n}\right)\sim\tfrac{1}{2^n}\quad\text{mentre}\quad\sin\tfrac{1}{3^n}\sim\tfrac{1}{3^n}$$

da cui

$$\frac{\sin\frac{1}{3^n}}{\log\left(1+\frac{1}{2^n}\right)} \sim \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{2^n}{3^n} \to 0.$$

Ne segue allora che

$$\log\left(1+\tfrac{1}{2^n}\right) + \sin\tfrac{1}{3^n} = \log\left(1+\tfrac{1}{2^n}\right)\cdot\left(1+\frac{\sin\frac{1}{3^n}}{\log\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}\right) \sim \frac{1}{2^n}$$

essendo $1+\frac{\sin\frac{1}{3^n}}{\log\left(1+\frac{1}{2^n}\right)} \sim 1$. Possiamo allora concludere che per $n \to +\infty$

$$\frac{\sqrt[4]{1+\frac{1}{2^n}}-1}{\log\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\sin\frac{1}{3^n}} \sim \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{4}$$

e quindi che $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{1+\frac{1}{2^n}}-1}{\log\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\sin\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{4}$.

NOTA: per studiare il denominatore non abbiamo potuto applicare direttamente la relazione di asintotico trattandosi di una somma.

10. Il limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ coinvolge una successione di *tipo esponenziale* che potremo riscrivere nella forma

$$\left(\cos\tfrac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2\log\left(\cos\frac{1}{n}\right)}$$

Studiamo quindi il comportamento della successione ad esponente $a_n = n^2\log\left(\cos\frac{1}{n}\right)$. Per $n \to +\infty$ abbiamo

$$\log\left(\cos\tfrac{1}{n}\right) = \log\left(1+\left(\cos\tfrac{1}{n}-1\right)\right) \sim \left(\cos\tfrac{1}{n}-1\right) \sim -\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n^2}$$

e quindi

$$a_n = n^2\log\left(\cos\tfrac{1}{n}\right) \sim n^2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n^2}\right) = -\tfrac{1}{2}$$

Ne segue che per $n \to +\infty$ risulta $a_n \to -\frac{1}{2}$ e dunque che

$$\left(\cos\tfrac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2\log\left(\cos\frac{1}{n}\right)} = e^{a_n} \to e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

11. Calcoliamo $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{\log(1+n^\alpha)}$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$. Osserviamo innanzitutto che se $\alpha>0$ allora $n^\alpha\to+\infty$ e quindi $\log(1+n^\alpha)\to+\infty$. Ne segue che, essendo $\sqrt[3]{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\to 0$, in questo caso il limite non presenta una forma indeterminata. Dall'algebra dei limiti otteniamo dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{\log(1+n^\alpha)} = 0, \quad \text{se } \alpha>0.$$

Allo stesso modo, osservato che se $\alpha=0$ allora $\log(1+n^\alpha)=\log 2$, otteniamo immediatamente che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{\log(1+n^\alpha)} = 0, \quad \text{se } \alpha=0.$$

Se invece $\alpha < 0$ allora $n^\alpha \to 0$ e quindi $\log(1+n^\alpha) \to 0$, il limite presenta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Procedendo come nei precedenti esercizi otteniamo che

$$\sqrt[3]{\cos \frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \sim -\frac{1}{3}\frac{1}{n}$$

Riguardo al denominatore, essendo $n^\alpha \to 0$, otteniamo

$$\log(1+n^\alpha) \sim n^\alpha$$

e quindi

$$\frac{\sqrt[3]{\cos \frac{1}{\sqrt{n}}} - 1}{\log(1+n^\alpha)} \sim \frac{-\frac{1}{3}\frac{1}{n}}{n^\alpha} = -\frac{1}{3}\frac{1}{n^{\alpha+1}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < \alpha < 0 \\ -\frac{1}{3} & \text{se } \alpha = -1 \\ -\infty & \text{se } \alpha < -1 \end{cases}$$

Riunendo quanto trovato possiamo concludere che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\cos \frac{1}{\sqrt{n}}} - 1}{\log(1+n^\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -1 \\ -\frac{1}{3} & \text{se } \alpha = -1 \\ -\infty & \text{se } \alpha < -1 \end{cases}$$

12. Per calcolare il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ procediamo come nel precedente esercizio. Abbiamo che

$$\left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} = e^{n^\alpha \log\left(\cos \frac{1}{n}\right)}$$

e che per $n \to +\infty$ risulta

$$\log\left(\cos \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$$

Ne segue che per $n \to +\infty$ si ha

$$n^\alpha \log\left(\cos \frac{1}{n}\right) \sim n^\alpha \cdot \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2}n^{\alpha-2} \to \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > 2 \\ -\frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$$

e dunque

$$\left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} = e^{n^\alpha \log\left(\cos \frac{1}{n}\right)} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 2 \\ e^{-\frac{1}{2}} & \text{se } \alpha = 2 \\ 1 & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$$