4. ESERCIZI sulle SUCCESSIONI, parte 2

Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

1. Sia (a_n) una successione divergente a $+\infty$. Allora

A. (a_n) è crescente.

B. $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ è limitata.

C. $\inf\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.

2. Siano (a_n) e (b_n) due successioni positive tali che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell \in \mathbb{R}$. Allora

A. $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$.

B. $e^{a_n} \sim e^{b_n}$ per $n \to +\infty$.

C. $\log a_n \sim \log b_n$ per $n \to +\infty$.

3. Siano (a_n) e (b_n) successioni positive, infinitesime e asintotiche per $n \to +\infty$. Allora

A. Per ogni successione (c_n), $a_n - c_n \sim b_n - c_n$ per $n \to +\infty$.

B. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, ${a_n}^\alpha \sim {b_n}^\alpha$ per $n \to +\infty$.

C. $\log a_n \sim \log b_n$ per $n \to +\infty$.

4. Siano (a_n) e (b_n) due successioni positive e regolari tali che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - b_n = 0$. Allora

A. $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$

B. $e^{a_n} \sim e^{b_n}$ per $n \to +\infty$

C. $\log a_n \sim \log b_n$ per $n \to +\infty$

Utilizzando i limiti notevoli visti e l'algebra dei limiti, calcolare i seguenti limiti

5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1}$ [0]

6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sin\frac{1}{n^2}} - 1}{\sqrt{\cos\frac{1}{n}} - 1}$ [−2]

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\tan\frac{1}{2^n}} - 1}{\sqrt[3]{\cos\frac{1}{3^n}} - 1} \log\left(\cos\frac{1}{2^n}\right)$ [$+\infty$]

8. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan\frac{1}{n^3}}{\sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2+1}}$ [0]

9. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{1+\frac{1}{2^n}} - 1}{\log\left(1+\frac{1}{2^n}\right) + \sin\frac{1}{3^n}}$ [$\frac{1}{4}$]

10. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ [$\frac{1}{\sqrt{e}}$]

11. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{\log(1+n^\alpha)}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ [0 se $\alpha > -1$, $-\frac{1}{3}$ se $\alpha = -1$, $-\infty$ se $\alpha < -1$]

12. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ [0 se $\alpha > 2$, $\frac{1}{\sqrt{e}}$ se $\alpha = 2$, 1 se $\alpha < 2$]