RISOLUZIONE

1. Per verificare il limite $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left|\tfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Osservato che $\frac{n}{n+1} - 1 = -\frac{1}{n+1}$ abbiamo

$$\left|\tfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \tfrac{1}{n+1} < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \tfrac{1}{\varepsilon} - 1 < n$$

Preso allora, grazie alla proprietà archimedea, $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n_0$ otteniamo che per ogni $n \geq n_0$ risulta

$$\tfrac{1}{\varepsilon} - 1 < n_0 \leq n \ \Rightarrow \left|\tfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

e quindi che il limite è verificato.

2. Verifichiamo che $\lim_{n\to+\infty} n^2 - 4n + 1 = +\infty$ provando che per ogni $M > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$n^2 - 4n + 1 > M \quad \forall n \geq n_0$$

Osservato che per ogni $n \geq 5$ risulta $n^2 - 4n + 1 \geq n^2 - 4n = n(n-4) \geq n$, scelto $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 \geq 5$ tale che $n_0 > M$ otteniamo che per ogni $n \geq n_0$ risulta

$$n^2 - 4n + 1 \geq n^2 - 4n = n(n-4) \geq n \geq n_0 > M$$

3. Dobbiamo verificare che $\lim_{n\to+\infty} \log(\frac{1}{n^2+1}) = -\infty$, ovvero che per ogni $M > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\log(\tfrac{1}{n^2+1}) < -M \quad \forall n \geq n_0$$

Applicando l'esponenziale di base e ad ambo i membri della precedente disequazione otteniamo

$$\log(\tfrac{1}{n^2+1}) < -M \ \Leftrightarrow\ \tfrac{1}{n^2+1} < e^{-M} \ \Leftrightarrow\ n^2 > e^M - 1$$

Dato che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $n^2 \geq n$, scelto $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0 > e^M - 1$, per ogni $n \geq n_0$ risulta

$$n^2 \geq n \geq n_0 > e^M - 1 \ \Rightarrow\ \log(\tfrac{1}{n^2+1}) < -M$$

4. Siano $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} + 1$ e $b_n = \frac{1+(-1)^n}{n^2}$. Osserviamo che, essendo le successioni $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(1+(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitate e $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ successione infinitesima, risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2} = 0$$

e quindi che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + 1 = 1$$

mentre

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2} = 0$$

Possiamo quindi concludere che l'affermazione $\boxed{\text{A}}$ è falsa (entrambe le successioni ammettono limite, sono regolari), anche l'affermazione $\boxed{\text{B}}$ è falsa (sono entrambe regolari ma $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 \neq 0 = \lim_{n\to+\infty} b_n$) mentre $\boxed{\text{C}}$ è vera dato che entrambe le successioni sono convergenti, quindi in particolare limitate.

5. Siano (a_n) e (b_n) due successioni positive tali che la successione somma $(a_n + b_n)$ risulti convergente. Abbiamo che l'affermazione $\boxed{\text{A}}$, (a_n) e (b_n) sono convergenti, è falsa. Ad esempio le successioni $a_n = 1 + (-1)^n$ e $b_n = 1 - (-1)^n$ non sono regolari mentre si ha che $a_n + b_n = 2$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e dunque che $(a_n + b_n)$ è convergente. Anche l'affermazione $\boxed{\text{C}}$, $(a_n - b_n)$ è regolare, è falsa: per le successioni dell'esempio sopra risulta $a_n - b_n = 1 + (-1)^n - (1 - (-1)^n) = 2 \cdot (-1)^n$ e tale successione non è regolare.

L'affermazione $\boxed{\text{B}}$, (a_n) e (b_n) sono limitate, è invece vera. Infatti, essendo $(a_n + b_n)$ successione convergente, abbiamo che esiste $M > 0$ tale che $a_n + b_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poichè (a_n) e (b_n) sono positive, se ne deduce che $0 < a_n < a_n + b_n \leq M$ e $0 < b_n < a_n + b_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque che (a_n) e (b_n) sono limitate.

6. Siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

L'affermazione $\boxed{\text{A}}$ è vera, infatti essendo $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ dalla definizione, scelto $\varepsilon = 1$ abbiamo che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < 1$ per ogni $n \geq n_0$ da cui, essendo positive risulta $a_n < b_n$ per ogni $n \geq n_0$.

L'affermazione $\boxed{\text{B}}$ è falsa, scelte ad esempio $a_n = n$ e $b_n = n^2$ risulta $\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = \lim_{n\to+\infty} n - n^2 = -\infty$. Infine l'affermazione $\boxed{\text{C}}$ è vera, infatti

$$\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to+\infty} b_n \left(\frac{a_n}{b_n} + 1\right) = \lim_{n\to+\infty} b_n$$

dato che $\frac{a_n}{b_n} + 1 \to 1$ per $n \to +\infty$.

7. Raccogliendo n^2 a numeratore e $\sqrt{n}$ a denominatore otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2 + \sqrt{n} - 1}{3\sqrt{n} - 2\sqrt[3]{n}} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2 + n^{-\frac{3}{2}} - n^{-2}}{3 - 2n^{-\frac{1}{6}}} = +\infty$$

dato che $\lim_{n\to+\infty} n^p = 0$ per ogni $p < 0$ mentre $\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty$ per ogni $p > 0$.

8. Abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2 \cdot 5^n - 4^n}{5 - 4^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n}{4^n} \cdot \frac{2 - \frac{4^n}{5^n}}{5 \cdot \frac{1}{4^n} - 1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\tfrac{5}{4}\right)^n \cdot \frac{2 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{5\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1} = -\infty$$

poiché $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$, essendo $\frac{5}{4} > 1$, mentre $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ dato che $0 < \frac{4}{5} < 1$ e $0 < \frac{1}{4} < 1$.

9. Usando le proprietà dei logaritmi possiamo scrivere

$$\lim_{n\to+\infty} \log(n) + \log(n^2 + 2) - \log(n^4 + 3) = \lim_{n\to+\infty} \log\left(\tfrac{n(n^2+2)}{n^4+3}\right)$$

e poiché per $n \to +\infty$ risulta $\frac{n(n^2+2)}{n^4+3} = \frac{n^3+2n}{n^4+3} \to 0^+$, dal limite notevole dei logartimi otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \log(n) + \log(n^2+2) - \log(n^4+3) = -\infty$$

10. Usando le proprietà degli esponenziali possiamo scrivere

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n^2}}{3^{-n^2} - 2^{3-n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\tfrac{e}{2}\right)^{-n^2} \cdot \frac{1}{\left(\tfrac{3}{2}\right)^{-n^2} - 8} = 0$$

dato che per $n \to +\infty$ risulta $-n^2 \to -\infty$ e $a^{-n^2} \to 0$ per ogni $a > 1$.

11. Per $\alpha > 0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha - n^3 + n}{n^2 + 2n} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n \cdot \dfrac{n^{\alpha-3} - 1 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} = -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{2}{n}} = 0 & \text{se } \alpha = 3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha-2} \cdot \dfrac{1 - n^{3-\alpha} + n^{1-\alpha}}{1 + \frac{2}{n}} = +\infty & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$

dove nell'ultimo caso abbiamo usato il fatto che se $\alpha > 3$ allora $\alpha - 2 > 0$ e dunque $n^{\alpha-2} \to +\infty$ per $n \to +\infty$.

12. Per $0 < a < 3$ abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n - \pi^n}{a^n + 2^n - 3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3} = +\infty$$

dato che $\pi > 3 > 2$ mentre $0 < \frac{a}{3} < 1$. Se $a = 3$ abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n - \pi^n}{3^n + 2^n - 3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n - \pi^n}{2^n - 2 \cdot 3^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2} = +\infty$$

Infine se $a > 3$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n - \pi^n}{a^n + 2^n - 3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{a}\right)^n \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^n - 1}{1 + \left(\frac{2}{a}\right)^n - 3\left(\frac{3}{a}\right)^n} = \begin{cases} -\infty & \text{se } 3 < a < \pi \\ -1 & \text{se } a = \pi \\ 0 & \text{se } a > \pi \end{cases}$$

Riunendo quanto ottenuto possiamo concludere che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n - \pi^n}{a^n + 2^n - 3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{a}\right)^n \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^n - 1}{1 + \left(\frac{2}{a}\right)^n + 3\left(\frac{3}{a}\right)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a \le 3 \\ -\infty & \text{se } 3 < a < \pi \\ -1 & \text{se } a = \pi \\ 0 & \text{se } a > \pi \end{cases}$$