RISOLUZIONE

1. Si ha che

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\} = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

Abbiamo quindi che A è insieme limitato, $-\sqrt{3}$ è un minorante e $\sqrt{3}$ un maggiorante. Poiché $\pm\sqrt{3} \in A$ possiamo concludere che

$$\inf A = \min A = -\sqrt{3} \quad \text{e} \quad \sup A = \max A = \sqrt{3}$$

2. Abbiamo che

$$B = \{|x| \mid x \in \mathbb{R},\, x^2 + x < 2\} = [0, 2)$$

Infatti, la disequazione $x^2 + x < 2$ ammette come soluzione ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $-2 < x < 1$, quindi

$$B = \{|x| \mid -2 < x < 1\}$$

da cui segue che $B = [0, 2)$. Infatti se $-2 < x < 1$ allora $0 \leq |x| < 2$, ovvero $|x| \in [0, 2)$, e viceversa per ogni $y \in \mathbb{R}$ con $0 \leq |y| < 2$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $-2 < x < 1$ e $y = |x|$.
Poiché $B = [0, 2)$, è immediato verificare che

$$\inf B = \min B = 0 \quad \text{e} \quad \sup B = 2.$$

Osserviamo che 2 non è massimo dato che non appartiene a B.

3. Risulta

$$C = \{\tfrac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \{1 - \tfrac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N},\, n \geq 2\}$$

Per $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ abbiamo che $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$ e quindi che

$$0 \leq 1 - \tfrac{1}{n+1} \leq 1$$

Ne segue che C è inferiormente limitato, ogni $\ell \leq 0$ è un minorante e poiché $0 = 1 - \frac{1}{0+1} \in C$ possiamo concludere che

$$0 = \min C = \inf C$$

Abbiamo poi che C è superiormente limitato, ogni $L \geq 1$ è un maggiorante. Verifichiamo che 1 è l'estremo superiore di C, ovvero che non esistono maggioranti di C più piccoli di 1. Preso $\varepsilon > 0$ qualcunque, proviamo che $1 - \varepsilon$ non è un maggiorante. A tale scopo è sufficiente provare che esiste $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tale che

$$1 - \tfrac{1}{n_0+1} > 1 - \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{n_0+1} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n_0 > \tfrac{1}{\varepsilon} - 1$$

e tale numero naturale esiste in virtù della proprietà archimedea[b]. Osserviamo infine che 1 non è un massimo dato che $1 \notin C$, infatti per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si ha $\frac{1}{n+1} \neq 0$ e quindi $1 - \frac{1}{n+1} \neq 1$.

[b] la proprietà archimedea afferma che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \leq n$

4. L'insieme $D = \{2^{1-k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ risulta inferiormente limitato. Infatti per ogni $k \in \mathbb{Z}$ risulta $2^{1-k} \geq 0$, quindi ogni $\ell \leq 0$ è un minorante. Abbiamo che 0 è l'estremo inferiore, dato che 0 è un minorante e non esistono minoranti più grandi di 0. Per provarlo, preso $\varepsilon > 0$ qualunque, proviamo che esiste $k_0 \in \mathbb{Z}$ tale che $2^{1-k_0} < \varepsilon$. Abbiamo

$$2^{1-k_0} = 2 \cdot 2^{-k_0} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; 2^{k_0} > \tfrac{2}{\varepsilon}$$

Ora, dalla disuguaglianza di Bernoulli[(c)], abbiamo che

$$2^{k_0} = (1+1)^{k_0} \geq 1 + k_0$$

e dalla proprietà archimedea esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $k_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Quindi per tale valore otteniamo $2^{k_0} \geq 1 + k_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ da cui $2^{1-k_0} < \varepsilon$. Abbiamo pertanto provato che

$$\inf D = 0$$

L'insieme D non risulta però superiormente limitato, non esiste alcun maggiorante. Infatti, preso comunque $L > 0$, procedendo come sopra, utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli e la proprietà archimedea, sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$2^{n_0} > \tfrac{L}{2}$$

allora, posto $k_0 = -n_0$ otteniamo che $2 \cdot 2^{-k_0} > L$ ovvero $2^{1-k_0} > L$.

5. Siano A e B sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$ tali che $A \subseteq B$. Abbiamo che l'affermazione $\boxed{\text{A}}$ è vera. Infatti, se B risulta superioremente illimitato, la proprietà è immediata. Se invece B risulta superioremente limitato, dato che $A \subseteq B$ avremo che ogni maggiorante di B risulta maggiorante di A. Dalla definizione di estremo superiore si ottiene allora che $\sup B$ risulta maggiorante di A, da cui

$$\sup A = \min\{L \in \mathbb{R} \mid a \leq L,\, \forall a \in A\} \leq \sup B.$$

L'affermazione $\boxed{\text{B}}$ è invece falsa, ad esempio si considerino gli insiemi $A = (1, 2)$ e $B = (0, 2)$ abbiamo che $A \subseteq B$ ma $1 = \inf A > \inf B = 0$.

Anche l'affermazione $\boxed{\text{C}}$ è falsa, ad esempio per gli insiemi $A = (0, 1)$ e $B = [0, 1]$ abbiamo che $A \subseteq B$ con $A \neq B$ ma $\inf A = \inf B = 0$ e $\sup A = \sup B = 1$.

6. Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ tale che $\inf \mathcal{A} = 0$ e $\sup \mathcal{A} = 1$. Abbiamo che l'affermazione $\boxed{\text{A.}}$ è falsa. Si consideri per esempio l'insieme $\mathcal{A} = [0, 1)$. Risulta $\inf \mathcal{A} = 0$, $\sup \mathcal{A} = 1$ ma $1 \notin \mathcal{A}$.

Anche l'affermazione $\boxed{\text{B.}}$ è falsa. Per l'insieme $A = \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1]$ risulta $\inf \mathcal{A} = 0$, $\sup \mathcal{A} = 1$ ma non esiste alcun $a \in \mathcal{A}$ tale che $0 < a < \frac{1}{2}$.

L'affermazione $\boxed{\text{C.}}$ è invece vera. Dalla caratterizzazione di estremo superiore si ha infatti che

$$1 = \sup \mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \leq 1 \quad \forall a \in \mathcal{A} \\ \forall \varepsilon > 0 \text{ esiste } a \in \mathcal{A} \text{ tale che } a > 1 - \varepsilon \end{cases}$$

Scelto allora $\varepsilon = \frac{1}{2}$ avremo che esiste $a \in \mathcal{A}$ tale che $a > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

[(c)] la disuguaglianza di Bernoulli afferma che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$ risulta $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

7. Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ insieme non vuoto e limitato. L'affermazione $\boxed{\text{A}}$ è falsa. Per esempio l'insieme $\mathcal{A} = (0,1) \subset \mathbb{R}$ è limitato e non vuoto ma non ammette ne' massimo ne' minimo.

L'affermazione $\boxed{\text{B}}$ è vera, infatti posto $m = \inf \mathcal{A}$ e $M = \sup \mathcal{A}$, dalla definizione di estremo superiore ed inferiore si ha $m \leq a \leq M$ per ogni $a \in \mathcal{A}$. Se $m = M$ allora risulta $m = a$ per ogni $a \in \mathcal{A}$ e dunque $\mathcal{A} = \{m\}$.

Anche l'affermazione $\boxed{\text{C}}$ è vera, infatti essendo $\mathcal{A}$ limitato avremo che $\inf \mathcal{A} \in \mathbb{R}$ ma che $\inf \mathcal{A} < a$ per ogni $a \in \mathcal{A}$, dato che $\inf \mathcal{A} \notin \mathcal{A}$ Fissato comunque $a_0 \in \mathcal{A}$, avremo che $\inf \mathcal{A} < a_0$.

Dato che per definizione di estremo inferiore $\inf \mathcal{A}$ è il massimo dei minoranti di $\mathcal{A}$, avremo allora che a_0 non è un minorante di $\mathcal{A}$. Ne segue che esiste $a_1 \in \mathcal{A}$ tale che $\inf \mathcal{A} < a_1 < a_0$.
Ripetendo il ragionamento, avremo che a_1 non è un minorante di $\mathcal{A}$ e quindi che esiste $a_2 \in \mathcal{A}$ tale che $\inf \mathcal{A} < a_2 < a_1$.
Procedendo in questo modo, avremo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $a_n \in \mathcal{A}$ tale che $\inf \mathcal{A} < a_n < a_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $\mathcal{A}$ contiene infiniti punti.

8. Sia $p(n) = n^2 + 3n$ e proviamo che $p(n)$ risulta divisibile per 2 per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 1$ abbiamo $p(1) = 1 + 3 = 4$ che è un numero pari, la *base dell'induzione* è quindi vera.
Supponiamo ora che $p(n)$ sia numero pari, *ipotesi induttiva*, e proviamo che anche $p(n+1)$ è numero pari. Abbiamo

$$p(n+1) = (n+1)^2 + 3(n+1) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 = (n^2 + 3n) + 2n + 4 = p(n) + 2(n+2)$$

e quindi che $p(n+1)$ è somma di due numeri divisibili per 2, in quanto $p(n)$ lo è per ipotesi. Ne segue che $p(n+1)$ è anch'esso divisibile per 2, ovvero è un numero pari.
Dal principio di induzione possiamo quindi affermare che $p(n)$ è numero pari per ogni $n \in \mathbb{N}$.

9. Posto

$$q_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

proviamo che

$$q_n = \frac{n}{n+1} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

È immediato che $q_1 = \frac{1}{2}$ è uguale a $\frac{1}{1+1}$. Supponiamo che sia vera l'uguaglianza $q_n = \frac{n}{n+1}$ (*ipotesi induttiva*) e proviamo che $q_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &= q_n + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

Dal Principio di induzione possiamo quindi concludere che $q_n = \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

10. Per provare che la disuguaglianza $2^{n-1} \leq n!$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ usiamo il Principio di induzione. Abbiamo che per $n = 1$ la disuguaglianza è vera dato che

$$2^{1-1} = 2^0 = 1 \leq 1! = 1.$$

Supponiamo ora che sia vera per n e proviamolo per $n+1$. Osservato che $1 \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ abbiamo

$$2^{(n+1)-1} = 2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \leq 2 \cdot n! \leq (1+n) \cdot n! = (n+1)!$$

quindi la disuguaglianza è vera per $n+1$.