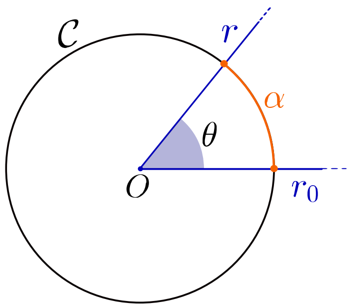
RICHIAMI di TRIGONOMETRIA

Francesca G. Alessio

Università Politecnica delle Marche

ANGOLI e RADIANTI

Sia $\mathcal{C}$ una circonferenza di raggio 1 e centro O. All'angolo θ individuato dalle due semirette r_0 e r uscenti da O corrisponderà un arco sulla circonferenza di lunghezza α. Diremo che l'angolo θ misura α **radianti**.



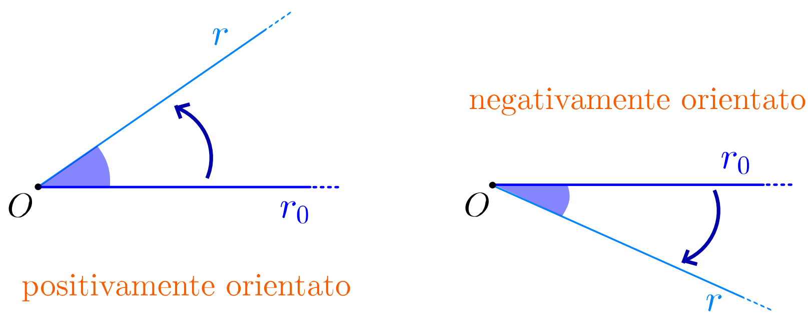
Dato che π è il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro, abbiamo che la circonferenza $\mathcal{C}$ ha lunghezza 2π. Quindi un angolo giro misurerà 2π radianti, un angolo piatto π radianti e un angolo retto $\frac{\pi}{2}$ radianti

$$\boxed{\alpha \text{ rad} : \beta^{o} = \pi \text{ rad} : 180^{o}}$$

- Un angolo di 45^{o} misura $\frac{\pi}{4}$ radianti, essendo $45^{o} = \frac{180^{o}}{4}$, mentre un angolo di $\frac{\pi}{9}$ radianti misura 20^{o} dato che $20^{o} = \frac{180^{o}}{9}$.

ANGOLI ORIENTATI

Fissata come semiretta di riferimento la semiretta r_0, si dice che l'angolo di lati le semirette r_0 e r e vertice O è **positivamente orientato** (rispettivamente, **negativamente orientato**) se per sovrapporsi alla semiretta r coprendo l'angolo assegnato, la semiretta r_0 deve ruotare in senso antiorario (rispettivamente, in senso orario).

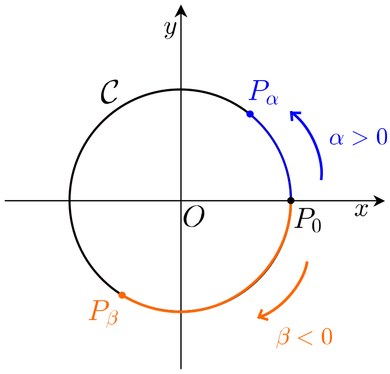


La misura di un angolo orientato verrà indicata con segno positivo se l'angolo risulta positivamente orientato, negativo se l'angolo è negativamente orientato.

Nel piano cartesiano $\boldsymbol{Oxy}$, considerata la **circonferenza trigonometrica** $\mathcal{C}$ di centro l'origine O e raggio 1, indichiamo con P_0 il punto di coordinate $(1,0) \in \mathcal{C}$.

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $\boxed{P_\alpha}$ il punto della circonferenza $\mathcal{C}$ tale che l'arco $\widehat{P_0 P_\alpha}$ abbia lunghezza $|\alpha|$, dove si conviene che

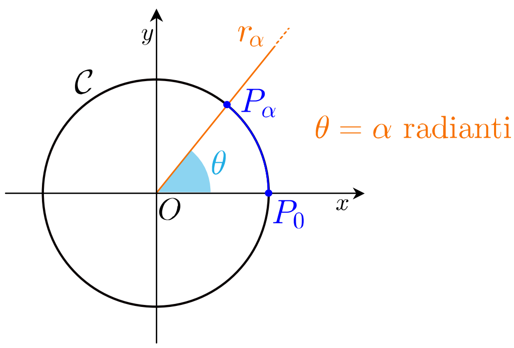
- partendo dal punto P_0, l'arco $\widehat{P_0 P_\alpha}$ viene percorso in senso antiorario se $\alpha > 0$ e in senso orario se $\alpha < 0$



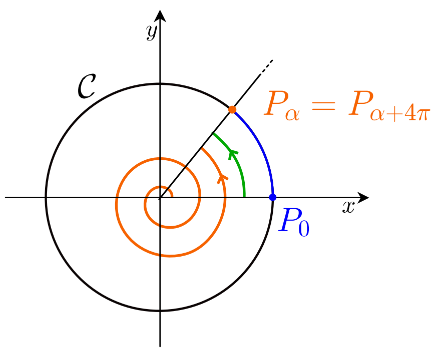
- se $|\alpha| > 2\pi$ il punto P_α viene individuato percorrendo k volte l'intera circonferenza trigonometrica e quindi un arco di lunghezza β dove $k \in \mathbb{N}$ e $\beta \in [0, 2\pi)$ sono tali che $|\alpha| = \beta + 2k\pi$.

Osserviamo che

• la semiretta r_α uscente dall'origine e passante per P_α individua con il semiasse delle ascisse positive un **angolo orientato** che misura α radianti.

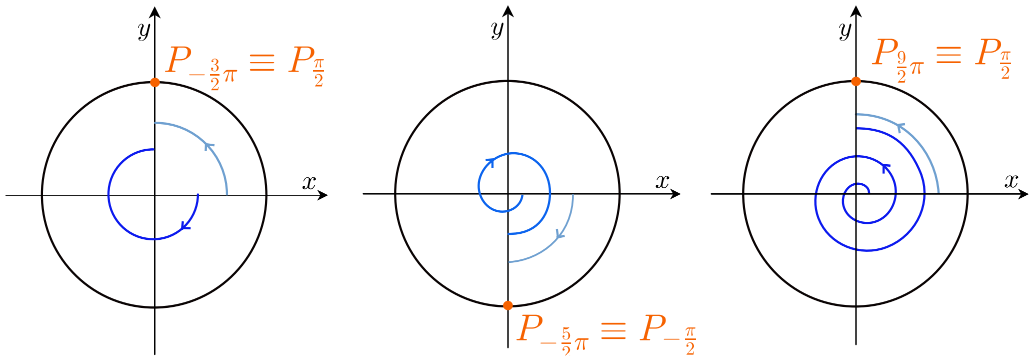


• dato che la circonferenza $\mathcal{C}$ misura 2π, risulta $\boxed{P_{\alpha+2k\pi} = P_\alpha}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$



Ad esempio

- $P_{-\frac{3}{2}\pi} = P_{\frac{\pi}{2}} = (0,1)$ poiché $-\frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2} - 2\pi$,
- $P_{-\frac{5}{2}\pi} = P_{-\frac{\pi}{2}} = (0,-1)$ dato che $-\frac{5}{2}\pi = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$,
- $P_{\frac{9}{2}\pi} = P_{\frac{\pi}{2}} = (0,1)$ essendo $\frac{9}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + 4\pi$.



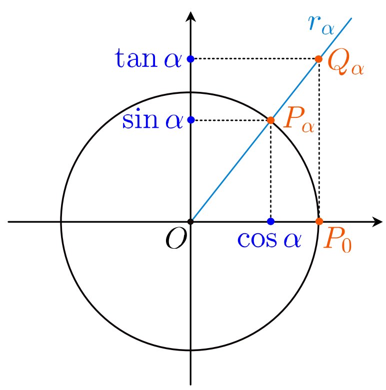
Si dicono **coseno** e **seno** di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$, rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del corrispondente punto P_α sulla circonferenza trigonometrica:

$$\boxed{P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)}$$

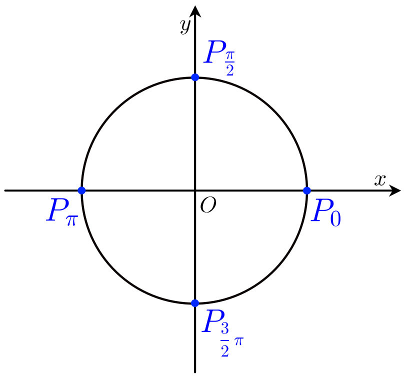
Per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si dice **tangente** di α, $\tan\alpha$, il rapporto

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

NOTA: $\tan\alpha$ è il coefficiente angolare della semiretta r_α e risulta uguale all'ordinata del punto Q_α di intersezione di r_α con la retta $x = 1$

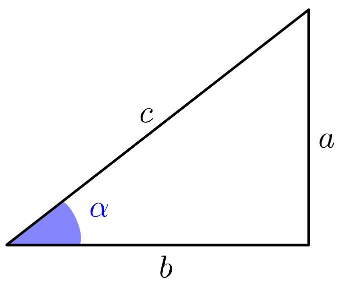


Dalla definizione segue immediatamente che



- $P_0 = (1,0)$ quindi $\boxed{\cos 0 = 1 \text{ e } \sin 0 = 0}$
- $P_{\frac{\pi}{2}} = (0,1)$ da cui $\boxed{\cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ e } \sin \frac{\pi}{2} = 1}$
- $P_\pi = (-1,0)$ dunque $\boxed{\cos \pi = -1 \text{ e } \sin \pi = 0}$
- $P_{\frac{3}{2}\pi} = (0,-1)$ pertanto $\boxed{\cos \frac{3}{2}\pi = 0 \text{ e } \sin \frac{3}{2}\pi = -1}$

Dato un triangolo rettangolo di cateti a e b e ipotenusa c, indicata con α la misura in radianti dell'angolo opposto al cateto a risulta

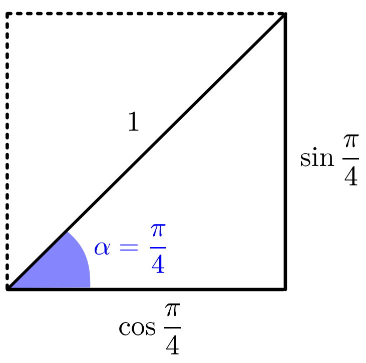


$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$$

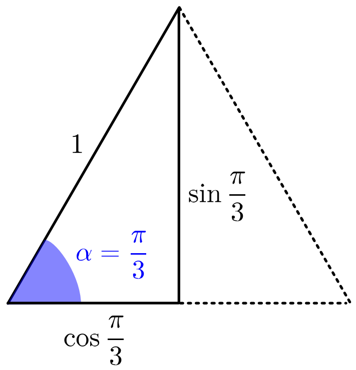
$$\boxed{\tan\alpha = \frac{a}{b}}$$

Ne deduciamo in particolare che, essendo $\cos\frac{\pi}{4}$ e $\sin\frac{\pi}{4}$ i cateti di un triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa 1, si ha



$$\boxed{\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

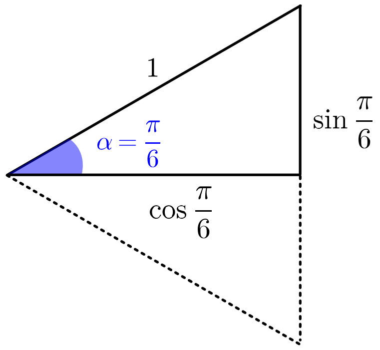
Dato che un triangolo rettangolo di ipotenusa 1 con un angolo acuto di $\frac{\pi}{3}$ radianti è la metà di un triangolo equilatero, dal teorema di Pitagora si ha



$$\boxed{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Allo stesso modo, poiché $\frac{\pi}{6}$ è la metà di $\frac{\pi}{3}$ abbiamo

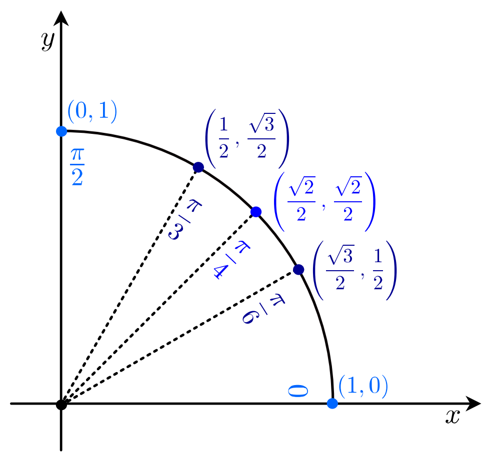


$$\boxed{\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}}$$

Riunendo quanto trovato, otteniamo la seguente tabella che riporta i valori di coseno, seno e tangente degli **angoli fondamentali**

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$



Ricordando che l'equazione della circonferenza trigonometrica $\mathcal{C}$ è $x^2+y^2=1$, dalla definizione, essendo $P_\alpha \in \mathcal{C}$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo

- **Identità Pitagorica:** $\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$
- $\boxed{-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \ \text{ e } \ -1 \leq \sin\alpha \leq 1}$
- $\boxed{\cos(\alpha+2k\pi) = \cos\alpha \text{ e } \sin(\alpha+2k\pi) = \sin\alpha}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$
- $\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha \text{ e } \sin(-\alpha) = -\sin\alpha}$
- **Identità degli angoli supplementari:** $\boxed{\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \ \text{ e } \ \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha}$
- **Identità degli angoli complementari:** $\boxed{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha \ \text{ e } \ \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha}$

Infine, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti formule

- **Formule di addizione**

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

- **Formule di sottrazione**

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

Ponendo $\alpha = \beta$ nelle formule di addizione otteniamo

- **Formule di duplicazione**

$$\boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

Dalle formule di duplicazione, grazie all'identità pitagorica, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\boxed{\cos(2\beta) = 1 - 2\sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1}$$

da cui seguono

- **Formule di bisezione**

$$\boxed{\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \boxed{\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

- **Formule di razionalizzazione:** se $t = \tan\frac{\alpha}{2}$ allora

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \quad \boxed{\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}} \quad \boxed{\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}}$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Considerate le corrispondenti **funzioni coseno**, **seno** e **tangente** abbiamo

- **DOMINIO**: $\mathrm{Dom}(\cos x) = \mathrm{Dom}(\sin x) = \mathbb{R}$ mentre $\mathrm{Dom}(\tan x) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;
- **IMMAGINE**: $\mathrm{Im}(\cos x) = \mathrm{Im}(\sin x) = [-1, 1]$ e $\mathrm{Im}(\tan x) = \mathbb{R}$;
- **SIMMETRIE**: $\cos x$ è funzione pari, $\sin x$ e $\tan x$ sono funzioni dispari;
- **PERIODICITÀ**: $\cos x$ e $\sin x$ sono funzioni periodiche di periodo 2π, $\tan x$ è una funzione periodica di periodo π.

Riguardo alle proprietà di **MONOTONIA** delle funzioni trigonometriche, limitandoci a considerare un **intervallo fondamentale** avente come ampiezza il periodo, abbiamo

- $\cos x$ è strettamente decrescente in $[0, \pi]$, crescente in $[\pi, 2\pi]$;
- $\sin x$ è strettamente crescente in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$;
- $\tan x$ è strettamente crescente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Grafico della funzione **coseno**

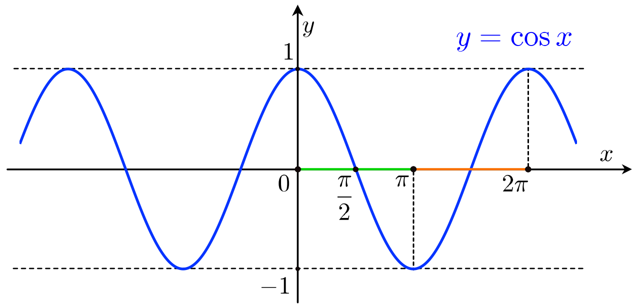
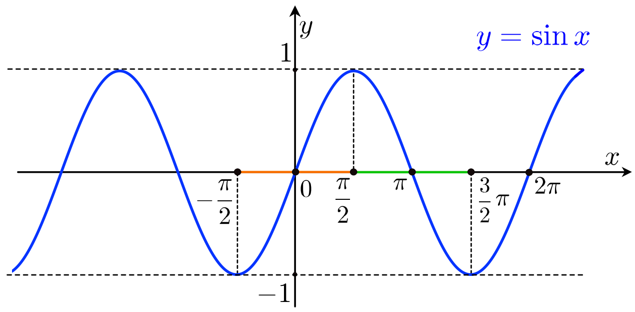
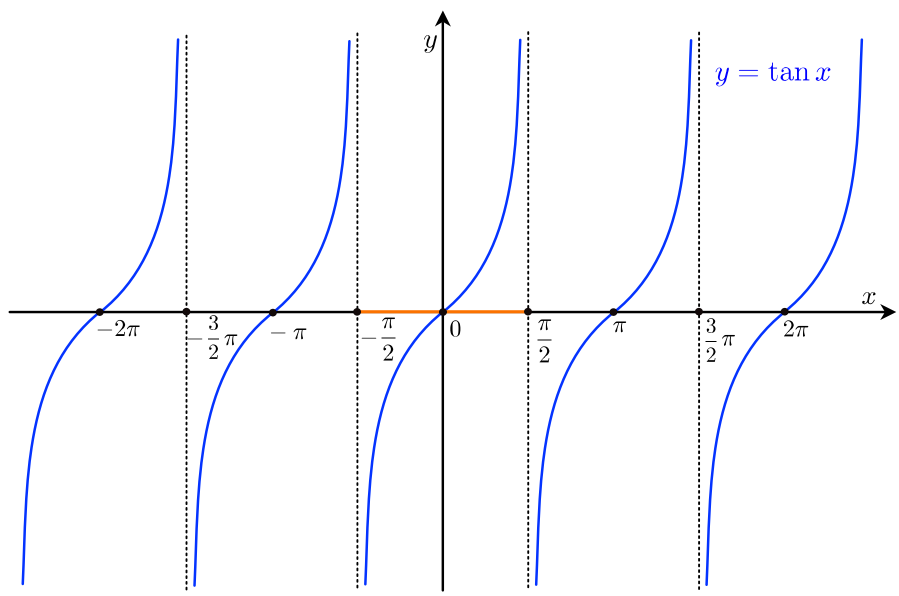


Grafico della funzione **seno**



NOTA: Dall'identità degli angoli complementari,
$\boxed{\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: il grafico del seno si ottiene dal grafico del coseno operando una traslazione di vettore $\vec{v} = (\frac{\pi}{2}, 0)$.

Grafico della funzione **tangente**



Le funzioni **arcocoseno**, $\boxed{\arccos x}$, **arcoseno**, $\boxed{\arcsin x}$, e **arcotangente**, $\boxed{\arctan x}$, sono definite rispettivamente come le inverse delle funzioni $\cos x$ ristretta all'intervallo $[0, \pi]$, $\sin x$ ristretta a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\tan x$ ristretta a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Osservato che $\cos([0, \pi]) = \sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ e $\tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$, si ha

- $x \in [-1, 1], \quad \arccos x = y \quad \Leftrightarrow \quad y \in [0, \pi], \quad \cos y = x$
- $x \in [-1, 1], \quad \arcsin x = y \quad \Leftrightarrow \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \sin y = x$
- $x \in \mathbb{R}, \quad \arctan x = y \quad \Leftrightarrow \quad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad \tan y = x$

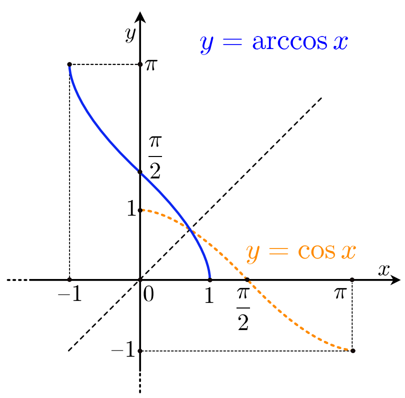
Ad esempio

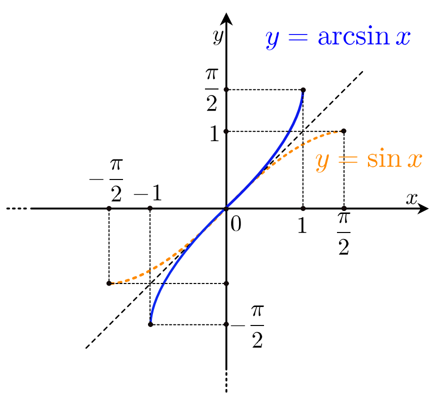
- Abbiamo che $\boxed{\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}}$ dato che $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$ e $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
- Si ha $\boxed{\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}}$ essendo $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- Risulta $\boxed{\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}}$ dato che $-\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$.

Abbiamo

- $\mathrm{Dom}(\arccos) = \cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ e $\mathrm{Im}(\arccos) = [0, \pi]$;
- $\mathrm{Dom}(\arcsin) = \sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ e $\mathrm{Im}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
- $\mathrm{Dom}(\arctan) = \tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(\arctan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

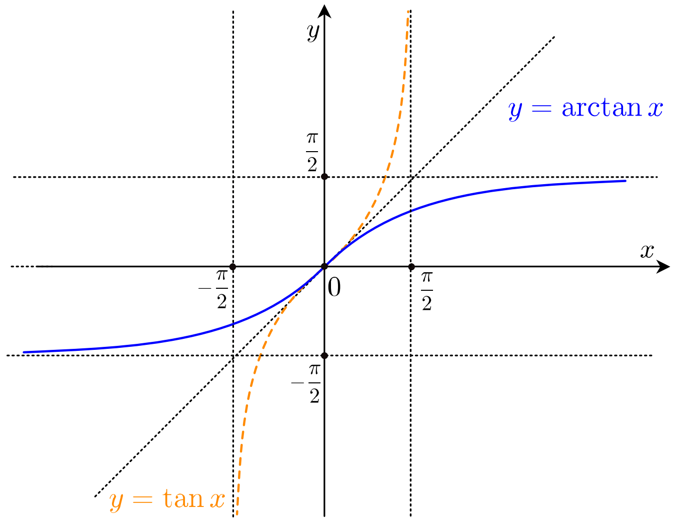
Il grafico delle funzioni $\arccos x$ e $\arcsin x$ risulta rispettivamente il simmetrico rispetto alla bisettrice $y = x$ delle funzioni $\cos x$, ristretta a $[0, \pi]$, e $\sin x$, ristretta a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$





NOTA: la funzione $\arcsin x$ è dispari e, dall'identità degli angoli complementari, si ha $\boxed{\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}}$ per ogni $x \in [-1, 1]$.

Il grafico della funzione arcontangente risulta invece il simmetrico alla bisettrice $y = x$ del grafico della funzione $\tan x$ ristretta a $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



NOTA: la funzione $\arctan x$ è dispari, strettamente crescente e assume valori strettamente compresi tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

EQUAZIONI e DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

Parliamo di **equazioni e disequazioni trigonometriche** quando nell'equazioni e disequazioni compaiono funzioni trigonometriche.

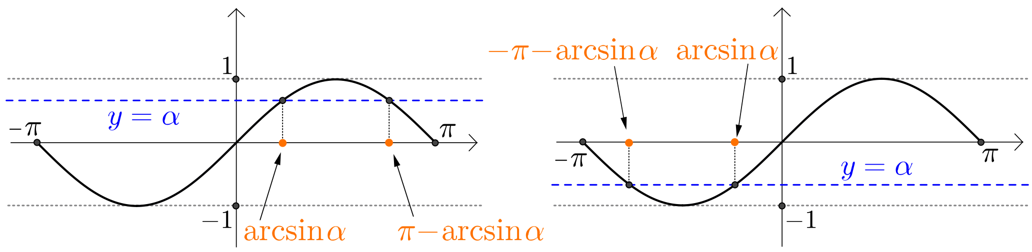
Per risolvere tali equazioni e disequazioni occorre tener presente che le funzioni seno e coseno sono **periodiche di periodo 2π**, mentre la funzione tangente è **periodica di periodo π**.

Per tale motivo, per risolvere un'equazione o disequazione trigonometrica converrà iniziare col **restringere** lo studio in un intervallo di ampiezza il periodo (in generale 2π, oppure π se è coinvolta solo la funzione tangente).
Una volta determinate le eventuali soluzioni in tale intervallo, si otterrà la soluzione in tutto $\mathbb{R}$ aggiungendo, per periodicità, **multipli interi del periodo**.

Vedremo innanzitutto equazioni e disequazioni *elementari*, per risolverle ragioneremo per **via grafica**, tracciando il grafico delle funzioni coinvolte in un intervallo di ampiezza il periodo.

$\sin x = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

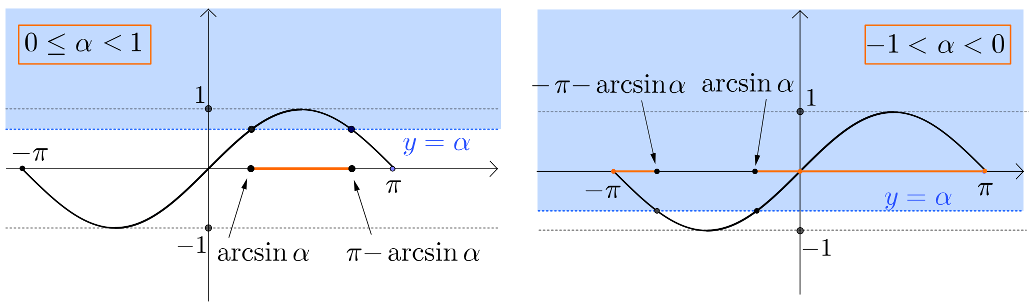
Osserviamo che l'equazione non ha soluzioni se $|\alpha| > 1$. Per $|\alpha| \leq 1$ ogni retta $y = \alpha$ interseca il grafico del seno nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ in due punti di ascissa $\arcsin \alpha$ il primo e $\pm\pi - \arcsin \alpha$ il secondo.



- L'equazione $\boxed{\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è verificata da $\frac{\pi}{4}$ e $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$. Per periodicità tutte le soluzioni reali sono date da $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ e $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\boxed{\sin x = -\frac{1}{3}}$ in $[-\pi, \pi]$ è verificata da $x = \arcsin(-\frac{1}{3}) = -\arcsin \frac{1}{3}$ e $x = -\pi + \arcsin \frac{1}{3}$.

$\sin x > \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

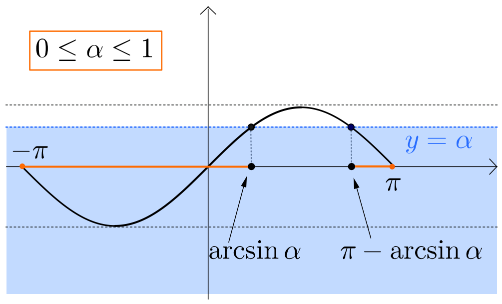
Possiamo tracciare il grafico della funzione seno in $[-\pi, \pi]$ e osservare in quali intervalli questo si trova <u>al di sopra</u> della retta $y = \alpha$.

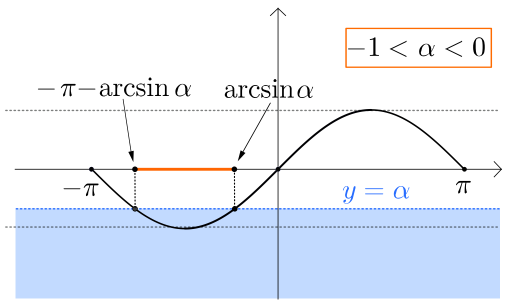


- La disequazione $\boxed{\sin x > 2}$ non ammette soluzioni mentre $\boxed{\sin x > -\pi}$ è verificata da ogni $x \in \mathbb{R}$.
- La disequazione $\boxed{\sin x > \frac{1}{2}}$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è verificata da $\frac{\pi}{6} < x < \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$. Per periodicità tutte le soluzioni reali sono date da $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\sin x < \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Tracciamo il grafico della funzione seno in $[-\pi, \pi]$ e osserviamo in quali intervalli questo si trova <u>al di sotto</u> della retta $y = \alpha$.

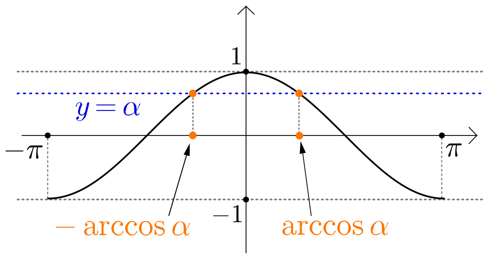




- La disequazione $\boxed{\sin x < \frac{\pi}{2}}$ è verificata da ogni $x \in \mathbb{R}$.
- La disequazione $\boxed{\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}}$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è verificata da $-\pi < x < \frac{\pi}{3}$ e $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi < x < \pi$. Per periodicità tutte le soluzioni reali sono date da $-\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

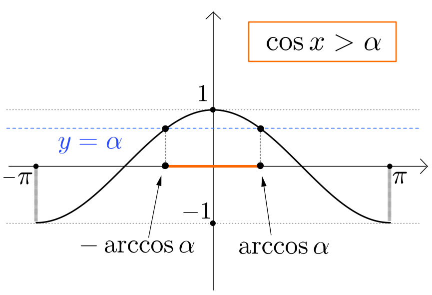
$\cos x = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

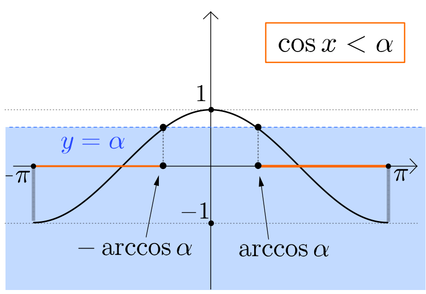
L'equazione non ha soluzioni se $|\alpha| > 1$ mentre per $|\alpha| \leq 1$ ogni retta $y = \alpha$ interseca il grafico del coseno in due punti di ascissa $\arccos \alpha$ e $-\arccos \alpha$



$\cos x > \alpha$ oppure $\cos x < \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

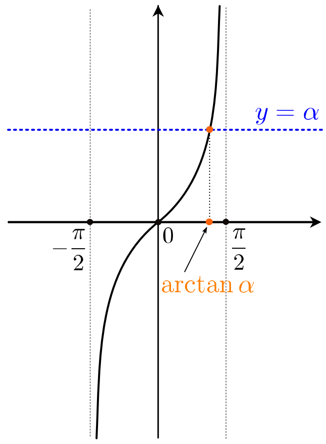
Anche in questo caso, possiamo tracciare il grafico della funzione coseno in $[-\pi, \pi]$ e la retta $y = \alpha$ e ragionare graficamente





$\tan x = \alpha, \quad \tan x > \alpha \quad$ oppure $\quad \tan x < \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

In questo caso possiamo restringere lo studio all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dove la funzione tangente risulta strettamente crescente (e quindi iniettiva)



- L'equazione $\tan x = 1$ nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è verificata da $x = \frac{\pi}{4}$, le soluzioni reali saranno quindi $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- La disequazione $\tan x > -2$ nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è verificata da $\arctan(-2) = -\arctan 2 < x < \frac{\pi}{2}$, le soluzioni reali saranno quindi date da $k\pi - \arctan 2 < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vediamo infine alcune equazioni e disequazioni *più complesse* per le quali occorrerà riportarsi ai casi *elementari* visti.

- L'equazione $\boxed{\cos(2x) - \sin x = 0}$, ricordando che $\cos(2x) = 1 - \sin^2 x$, risulta equivalente a $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, equazione algebrica nella variabile $t = \sin x$. Ammette come soluzioni ogni $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- L'equazione $\boxed{\sin x + \cos x = 1}$ può essere ricondotta all'equazione razionale $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$ ponendo $t = \tan \frac{x}{2}$, per $x \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Ammette come soluzioni ogni $x = 2k\pi$ e $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

  In alternativa, posto $y = \cos x$ e $z = \sin x$, dall'identità pitagorica l'equazione risulta equivalente al *sistema*

  $$\begin{cases} y + z = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

  che ammette come soluzioni $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Quindi le soluzioni dell'equazione iniziale saranno date dalle soluzioni dei sistemi

  $$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases}$$

- La disequazione $\boxed{\sqrt{1-\cos x} \leq |\sin x|}$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ ammette come soluzioni ogni $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- La disequazione $\boxed{\log(\sin x) + \log(\cos x) + 2\log 2 > 0}$ dalle proprietà del logaritmo, risulta equivalente a $\log(4 \sin x \cos x) > 0$ per $\sin x > 0$ e $\cos x > 0$, ammette come soluzioni ogni $\frac{\pi}{12} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.