TEOREMA 4.5. (DI WEIERSTRASS)
Sia $f(x)$ funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora $f(x)$ ammette massimo e minimo in $[a,b]$: esistono $x_m, x_M \in [a,b]$ tali che $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ per ogni $x \in [a,b]$.

DIM. Posto $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, sia $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente tale che $y_n \to M$ per $n \to +\infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia

$$A_n = \{x \in [a,b] \mid f(x) \geq y_n\} \quad \text{e} \quad a_n = \inf A_n.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, essendo $y_n \leq y_{n+1}$, risulta $A_{n+1} \subset A_n \subset [a,b]$ e quindi che

$$a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è successione crescente e limitata in $[a,b]$ e quindi, dal Teorema di regolarità delle successioni monotone, tale successione risulta convergente, sia $x_M = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \in [a,b]$.
Proviamo che $f(x_M) = M$ e dunque che $M \in \mathbb{R}$ e che $x_M \in [a,b]$ è punto di massimo. A tale scopo osserviamo che, dalla caratterizzazione di estremo inferiore, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in A_n$ tale che

$$a_n \leq x_n \leq a_n + \frac{1}{n}.$$

Dal Teorema del confronto per i limiti, otteniamo che anche $x_n \to x_M$ per $n \to +\infty$, da cui, essendo $f(x)$ continua $f(x_n) \to f(x_M)$ per $n \to +\infty$. D'altra parte, essendo $x_n \in A_n$, abbiamo che $M \geq f(x_n) \geq y_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e poichè $y_n \to M$ per $n \to +\infty$, sempre dal Teorema del confronto per i limiti, risulta $f(x_n) \to M$ per $n \to +\infty$ e dunque che $f(x_M) = M$ $\square$